

חדו"א 2 למדעי המחשב – תקציר שיעור ראשון

ד"ר בועז צבאן, מכון אינשטיין למתמטיקה

מוסכמה. בקורס זה המינוח פונקציה יתייחס תמיד לפונקציה המוגדרת על תת-קבוצה של הישר הממשי $\mathbb{R}$ ומקבלת ערכים ממשיים.

1 הגדרת הגבול

להלן שתי הגדרות שקולות לתכונה $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ (האומרת שהפונקציה $f(x)$ מתקרבת לאספר L כאשר x מתקרבת ל x_0). תכונה זאת מסומנת גם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L$. כל ההגדרות אומרות, בצורה מדויקת, שאם x קרוב ל x_0 אז $f(x)$ קרוב ל L .

הגדרה א (בלשון ϵ - δ). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ אם:

לכל $0 < \epsilon$ קיים $0 < \delta$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$, יתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$.

ההגדרה הבאה מראה שמספיק להתבונן בערכים מסויימים של ϵ ו δ , ולא צריך לבדוק את כל הערכים האפשריים עבורם.

הגדרה ב (עם חזקות שליליות של 10). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ אם:

לכל n טבעי קיים m טבעי כך שאם $0 < |x - x_0| < 10^{-m}$, אז $|f(x) - L| < 10^{-n}$.

ההגדרה האחרונה אומרת, מבחינה אינטואיטיבית, שלכל n טבעי קיים m טבעי כך שאם x שונה מ x_0 אך מתלכד עם x_0 ב m ספרות (לפחות) אחרי הנקודה העשרונית, אז $f(x)$ מתלכד עם L ב n ספרות (לפחות) אחרי הנקודה העשרונית.

הניסוח הזה לא לגמרי מדויק, כיון שיש מקרי קצה שבהם מספרים קרובים מאד ובכל זאת אינם מתלכדים בהרבה ספרות אחרי הנקודה, למשל: 0.999999999 קרוב מאד ל 1 למרות שאינו מתלכד עימו אפילו בספרה אחת אחרי הנקודה. בכל אופן, פרט למקרי קצה אלה הניסוח הזה נכון, ובכל אופן נשתמש בו רק לשם הבנה ולא להוכחות, שצריכות להיות על פי הגדרה א או הגדרה ב השקולה לה.

2 משפטים בסיסיים על גבולות

הדוגמאות הפשוטות ביותר לגבולות של פונקציות מובאות במשפט הבא.

משפט 1. לכל קבוע c מתקיים: $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

כמו-כן, כפל בקבוע משנה את הגבול (אם הוא קיים) בצורה מאד צפויה מראש.

משפט. אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, אז לכל קבוע c מתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot L$.

(במילים אחרות, $\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ אם הגבול באגף ימין קיים.)

מדוגמאות אלה והמשפט הבא (שאוחר שכל הפעולות החשבוניות הרגילות מתנהגות כמו שהיינו מצפים מהן), אפשר לקבל דוגמאות נוספות רבות.

משפט (פעולות חשבוניות על גבולות). נניח כי $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = L_1$ וכן $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = L_2$. אזי:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = L_1 + L_2$.

(במילים אחרות, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$ אם שני הגבולות שבאגף ימין קיימים.)

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) - f_2(x)) = L_1 - L_2$.

(במילים אחרות, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) - f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$ אם שני הגבולות שבאגף ימין קיימים.)

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = L_1 \cdot L_2$.

(במילים אחרות, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$ אם שני הגבולות שבאגף ימין קיימים.)

4. אם $L_2 \neq 0$, אז $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$.

(במילים אחרות, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x)/f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$ אם שני הגבולות שבאגף ימין קיימים, וזה

שבאכנה אינו אפס.)

5. אם החזקה $L_1^{L_2}$ מוגדרת, אז $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)^{f_2(x)} = L_1^{L_2}$.

(במילים אחרות, אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = L_1$ ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = L_2$, אז $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)^{f_2(x)} = L_1^{L_2}$).
 מוגדרת).

מהמשפט האחרון נובע שהגבול של פונקציה המתקבלת על ידי מספר סופי של פעולות חיבור, חיסור, כפל, מנה וחזקה, שווה למספר המתקבל מביצוע אותן פעולות על הגבולות של הפונקציות.

משפט (גבול של הרכבת פונקציות). אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ וכן $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, אז $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = b$.
 גם כאן יוצא, שהמשפט נכון להרכבה של מספר כלשהו של פונקציות.

דוגמא. נמצא את $\lim_{x \rightarrow 2} (2x+5)^{\sqrt{x-1}}$.

לכן $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} = \sqrt{1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} x-1 = \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2-1 = 1$.

כמו כן, $\lim_{x \rightarrow 2} (2x+5) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x) + \lim_{x \rightarrow 2} 5 = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 = 2 \cdot 2 + 5 = 9$.

לכן $\lim_{x \rightarrow 2} (2x+5)^{\sqrt{x-1}} = 9^1 = 9$.