

אברהם פרנקל
האבסיומות של תורת הקבוצים

האכסיומות* של תורת הקבוצים*.

אברהם (אדולף) פרנקל, מרבורג.

תרגם בנימין אמירה, תל-אביב.

הבנין של תורת הקבוצים, אשר בנה נאורג קנטור מתוך אינטואיציה של יוצר, בתנו בפעם הראשונה באור ברור ובסוס תוקי למושג. האין-סוף הגדול המחלטי (2) (יחד, עם זאת גם למושגים אחרים ובתוסס למושג ה"קונטינוואוס"), מושג, אשר חכמי הפילוסופיה והמתמטיקה התוכחו עליו במשך דורות רבים, — כאלו נודעזע ביסודו אחרי הוכחותיהם של ב. רסל, א. צרמלה, ק. בורלי-פורטי, י. רישרד (C. Burali-Forti, E. Zermelo, B. Russell, J. Richard) ואחרים, אשר הראו שבנין זה, כמו תורת ההגיון הצרופה, משמש מקום לסתירות הגיוניות ידועות (פרדוכסים). הואיל ולא עלה עדיין הדבר לתת במקום הנדרתו של קנטור (הגדרה אחת נעדרת סתירות ומאחר שגם הבסוס התריף של ב. רסל וא. ויטהיד (A. W. Whitehead)⁽¹⁾ לא הצליח להרחיק כל התנגדות (עיין Axiom of reducibility שלחם), הנה מוכרחה איפוא תורת הקבוצים להכנע להגבלות היסודיות של ל. א. י. בראואר ות. ויל (L. E. J. Brouwer, H. Weyl)⁽²⁾ המשאירות מעט מאד

(*) הערות שכתרגום העברי הנוספות על אלו שבמקור, מסומנות באותיות עבריות. — המחבר והמתרגם.
(א) הננו משתמשים כאן במונח "אכסיומה" לא במונח של "אמתה" או "משפט המוכן מאליו ושאינו דורש הוכחה", כי אם (בהתאמה לתורת המונחים של המתמטיקה החדשה, ביחוד תחת השפעת הלברס מוסר האכסיומטיקה המתמטית) הננו מצינים בסוגה זה את אחת הדרישות המקדמות אשר הונחו ביסוד איזו תורה ואשר מהן נבנית תורה זו כאפן דדוקטיב.
(ב) המושג "אין-סוף גדול מחלטי" או "אקסואלי" בא כנגוד למושג "אין סוף גדול סופניציאלי".
במושג האחרון הננו פוגשים, למשל, במשפט: אם גדל המספר n עד אין סוף, אז שואף $\frac{1}{n}$ אל הגבול 0. במשפט זה גדל המספר n יהיה יותר גדול מכל מספר קבוע אשר יכול להגות מראש, אבל בכל אחד מסצבי השתנותו הנהו נשאר סופי. לעומת זאת הנה המושג "אין-סוף גדול מחלטי" הבא בתורת הקבוצים איננו גדל סתתנה כי אם גדל קבוע הגדול מכל מספר סופי.

(ג) הגדרתו של קנטור אומרת: קבוצה היא אסף (בחור רבר אחד שלם) של עצמים מחשיים או מפשטים קבועים הנבדלים היפכ זה מזה. העצמים האלה נקראים בשם אברי הקבוצה.

1 Principia Mathematica. I—III (Oxford 1910—13)

2 E. J. Brouwer, Verband d. Kon. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam (Eerste Sektie) Deel XII, עיין:

Math. Zeitschrift, Bd. 10 (1921), p. 39

מבנינה, או לומר על כסוס קונסטרוקטיבי גנטי ולהתבסס במקוטו על שיטת אבסטרומות, שהיא רחבה למדי בכדי לתת מקום לדרכים החוקיות של תורת הקבוצים, ויהי עם זאת צרה במדה תדרושה להרחקת הפרדוקסים.

בכוון האבסטרומטי הזה הורה א. צרמלו במחקרו משנת 1908⁽¹⁾ דרך חדשה בתנוימוד לתורת הקבוצים, אשר עליו נבנה כבר חלק גדול מדרכי התורה הזאת ודרכים אחרות יכולות עוד להבנות עליו. חוץ משאלות אי-התליות⁽²⁾ של האבסטרומות אחת ברעותיה וחסר הסתירה⁽³⁾ שביניהן, אשר עליהן לא באה תשובה במחקר הנ"ל, לקחה התקירה החיה בעוד חסרון עקרי, והוא שבמקום חשוב אחד הובא מושג אשר הנדרתו אינה מדויקת די צרכה, הוא מושג "התכונה המגדרת" (Definite Eigenschaft), ולכן יש לחשוש שוב לדברים כלתי ברורים ולסכנה בבחינה ההגיונית. לפני זמן מה הראיתי (במאמרי [A]) עוד חסרונות אחדים פחות יסודיים אשר לאותה ההקירה האבסטרומטית. אחרי אשר עלה בידי⁽⁴⁾ להרחיק גם את מושג המגדר, ולהביא במקומו מושגים מתמטיים מדויקים, יש ביכולתי לתת כאן שיטת אבסטרומות חדשה, אשר עליה נוכל לבנות באופן דדוקטיבי את תורת הקבוצים לעת עתה בחקף הדומה לזה של צרמלו. על בנין זה אראה בהמשך הדברים רק ברמזים, וחקירה מפורטת אשאר למאמר אחר. שיטת האבסטרומות הבאה כאן מתאספת בגבול היכולת (גם בבטוייה) לשיטת צרמלו, בכדי לחקל את השואותן זו לזו; היא מקבלת בלי שנוי את האבסטרומות IV — VI אשר במאמר [Z]. והנה נמוקי לשנויים אשר הכנסתי ביתר האבסטרומות.

לאבסטרומה I. היות ומטעמים פרינציפיוניים איני נותן מקום בתוך התחום $\mathfrak{B}$ אלא לקבוצים (ובתוכם גם לקבוצת-האפס). מה שאינו קבוצה אינו יכול איפוא להיות גם אבר של קבוצה. (ראה [A] עמ' 233). לכן יהיה כל עצם אשר בתוך התחום $\mathfrak{B}$ קבוע לנמרי עיי אבריו. ובפרט יהיה כל עצם אשר אינו מכיל שום אברים אידנטי עם קבוצת-האפס. ערך האבסטרומה I (אשר רק למראית עין תשאר בלי שנוי) שונה איפוא בעקרו מזה של האבסטרומה של [Z]. כי בצמצומה של זו האחרונה על קבוצים טבועה הנבלה עיקרית.

לאבסטרומה II. חוץ מהמושג היות מוכלי (e) הנני מוצא לנכון להשאיר גם את מושג האידנטייות (=) בתור מושג יסודי כלתי מגדר ולא להגדירו עיי הראשון (בעזרת האבסטרומות II ו-III), היות ומושג האידנטייות נמצא כבר implicate בתוך המושגים של קבוצה בעל אבר אחד וקבוצה בעל שני אברים. ועיי כך אפשר יהיה, בקשר עם האבסטרומה III, לומר על הדרישה לקבוצים יסודיים בעלי אבר יחיד. חוץ מזה, אפשר לומר גם על הדרישה לקבוצת-האפס, אם נדרש שאין התחום $\mathfrak{B}$ יכול להיות ריק בכלל, דרישה הנכללת באבסטרומה VII (ראה להלן עמ' 6). לאבסטרומה III. על תבן האבסטרומה הזאת, האפיית לשיטת האבסטרומות החדשה, עיין המאמר [B] והמשלים הבאים להלן.

על האבסטרומות VII ו-VIII עיין שני הסעיפים האחרונים של מאמר זה.

(1) Untersuchungen üb. d. Grundlagen der Mengenlehre I; Math. Annalen, Bd. 65 (1908) 1 p. 261 (להבא אביא את דברי המאמר הזה בסימן [Z]). עיין גם ספרי Einleitung in die Mengenlehre Berlin, 1919 (הוצאה חדשה 1923).
(2) על שטרון שאלה זו ראה את החקירה של א. פרנקל Math. Annalen, Bd. 86 (1922), p. 230; Sitzungsberichte der Preuss. Akademie d. Wissensch. Berlin, Math.-Phys. Klasse, 1922, p. 253 (להבא אביא את דברי המאמרים האלה בסימנים [A] ו-[B]).
(3) בשאלה הקשה הזאת יש להכות ליריעות הרשות מתוך התקדמות בחקירות של ה. הילברט; ראה Abhandl. a. d. Math. Seminar d. Hamburgischen Universität Bd. 1 (1922), p. 157; גם את המאמר Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung XXXI Jahrg. (1922), p. 40.
(4) עיין: כתביו [B] והרצאתי בכתבי Naturforscherversammlung in Leipzig 1922.

תורת הקבוצים עוסקת בעצמים הנמצאים בתוך תחום $\mathfrak{U}$. העצמים האלה יקראו בשם קבוצים. הננו אומרים על קבוצה ידוע, שהוא "מצוי", אם הוא נמצא בתוך התחום. בין הקבוצים a, b, m, n , וכו' יכולים להתקיים יחסים יסודיים בצורת $b = a$ או $m \in n$. את היחס $b = a$ הננו מבטאים a אידנטי עם b , a שווה ל b , a ו b טצינים את אותו הקבוצה; ליחס הזה ישנן התכונות הרגילות של הזהות (אידנטיטת) ⁽¹⁾. בהתקיים היחס $m \in n$, הננו אומרים m הוא אבר של n , n מכיל את האבר m וכו'. בכדי להביע, שהיחסים $b = a$ או $m \in n$ אינם מתקיימים, הננו כותבים $b \neq a$ (a שונה מ b) או $m \notin n$ (m איננו אבר של n וכו').

הגדרה א' אם a, b, m הם קבוצים כאלה, $b \neq a$, ו $a \in b$, אבל לא קבוצה אחר השונה מהם, אברים של m הם, אז יקרא m בשם "קבוצה-זוג" של a ו b (ועל פי האכסיומה I — בשם "קבוצה-זוג" ⁽²⁾).

הגדרה ב'. אם m ו n הם קבוצים כאלה, שכל אבר של m הוא גם אבר של n , אז יקרא m "קבוצה חלקי" של n .

הגדרה ג'. אם m ו u הם קבוצים כאלה, ש u מכיל בתור אברים את כל הקבוצים החלקיים של m ורק אותם, אז יקרא u בשם "קבוצה-חזקה" של m (ועפ"י האכסיומה I: קבוצה-חזקה) (רציונו: $u = 2^m$) ⁽²⁾.

הגדרה ד'. אם m ו s הם קבוצים כאלה, ש s מכיל בתור אברים את כל אברי האברים של m ורק אותם, אז יקרא s בשם "קבוצה שפצצקירה" של m (ועפ"י האכסיומה I: הקבוצה שבצבירה) (רציונו: $\mathfrak{S}m = s$).

הגדרה ה'. אם m הוא קבוצה של אברים "חסרי אברים משותפים" (ז. א. שום אבר של אבר אחד של m אינו בא בתור אבר גם באיזה אבר אחר של m) ואם s_0 הוא קבוצה אשר לו אבר אחד משותף עם כל אבר של m , ואברים אחרים אין ל s_0 , אז יקרא s_0 בשם "קבוצה שבבחירה" של m .

כל קבוצה שבבחירה של m מכיל איפוא אבר אחד מכל אחד מאברי m , אבל אינו מכיל שום אבר אשר איננו אבר של אחד מאברי m . קבוצה שבבחירה הוא לפיכך קבוצה חלקי של הקבוצה שבצבירה $\mathfrak{S}m$, אם האחרון מצוי. ברור הדבר, שלאיזה קבוצה m יכול להיות קבוצה שבבחירה רק במקרה שכל אבר של m מכיל אברים, ובמקרה זה לא דוקא קבוצה שבבחירה אחת. לכן בדברנו להבא בקשר עם איזה קבוצה m על "הקבוצה שבבחירה שלה", כנתנו היא לאיזה שהוא מהקבוצים שבבחירה של m . בעצם הדבר אין טושן הקבוצה שבבחירה דורש את ההנבלה לקבוצה m בעל אברים חסרי אברים משותפים; להנבלה זו נתן מקום בהגדרה בעקרון התאמה ל $[Z]$; ולכן בדברנו על הקבוצה שבבחירה של הקבוצה m , יתייחסנו שאברי m הנם חסרי אברים משותפים.

הננו באים עכשו לבאור טושן הפונקציה. בהשאר איזה קבוצה x בלתי קבוע ("משתנה") ⁽³⁾,

(1) המיד יהא איפוא $a = a$; מתוך $b = a$ יצא המיד $a = b$, ו מתוך $b = a$ ו $c = b$ יצא $c = a$, וגם מתוך $m \in n$, $a \in m$, $b \in a$ יצא המיד $b \in n$.

(2) כאן ובהגדרות הבאות מצינת הידיעה, שהקבוצה קבוע ע"י אבריו באופן הידעתי.

(3) כאן חשובה העובדה שמציאות האברים הנודדים של u (ז. א. אופי הקבוצה אשר לקבוצים החלקיים) צריכה להיות קבועה מקדם עפ"י הגדרה ב', ולא כמו אצל קנטור, שכל אוסף ("Zusammenfassung") אברים של u הוא אבר של u .

(4) למעשה עובר המשתנה x המיד דרך כל אברי קבוצה ידוע.

יהיו בדרך כלל גם קבוצת החזקה, הקבוצה שבבניה והקבוצה שבבניה שלו בלתי קבועים, כמו כן גם קבוצת-הזוג שלו עם קבוצת אחר. הקבוצים האלה התלויים ב- x — ובכללם גם המקרה הקצוני של קבוצת קבוע (קונסטנטי) — נחשבים לפונקציות של x . כמו כן תקרא גם פונקציה של פונקציה של x בשם פונקציה של x . בכדי לציין את הפונקציות משתמשים בציונים ψ, φ , וכו', וכשעת הצורך — בהוספת המשתנה הבלתי תלוי x בצורת $\varphi(x)$, $\psi(x)$ וכו'; φ הוא איפוא החק תמראה, באיזה סדר יש להפיק על x (ואולי גם מפני בנין קבוצת זוג, על קבוצים קבועים אחרים) פעולות הבנין של קבוצת-הזוג, קבוצת חזקה, קבוצים שבבניה, קבוצים שבבניה (וקבוצים שבבניה עפ"י ההגדרה ו' הבאה להלן) — בהתאם להגדרה, מספר פעמים סופי כמובן. ועכשו נשלים ע"י ההגדרה ו' את בנין מושג הפונקציה המובא כאן.

הגדרה ו'. אם φ ו- ψ הן פונקציות, R אחד היחסים היסודיים $=, \neq, \varepsilon, \varepsilon, m_0$ קבוצים כאלה ש- m_0 מכיל בתור אברים את כל האברים ורק את האברים y של m אשר בהם מתקים היחס $\varphi(y) R \psi(y)$, אז יקרא הקבוצה m_0 בשם קבוצת שבבניה של m הנקבע ע"י היחס $\varphi R \psi$ (ועפ"י האכסיומה I: הקבוצה שבבניה) (וציונו: $m_{\varphi R \psi} = m_0$). אם ימצא ב- m , או φ או ψ גדל בלתי קבוע x (חזן מהמשתנה העזרי y), אז יקרא גם m_0 בשם פונקציה של x .

ההגדרה הזאת ספקיעה את מושג ההכונה המגדרת, אשר לו ערך מכריע ב- $[Z]$ בבירור הקבוצים החלקיים m_0 , ובמקומו היא נותנת בתור קריטריון לזאת, שאברים ידועים y של m ורק הם יכולים להאסף לקבוצת חלקי m_0 , את התנאי שבשכיל אלה y יהא הקבוצה $\varphi(y)$ אבר של הקבוצה $\psi(y)$, וכאן מצינים φ ו- ψ פונקציות נתונות. ליחסים $\neq, =, \varepsilon$ יש כאן ערך תשוה לערכו של היחס ε , היות אבר, בהתאמה לתפקיד שהם, יחד עם ε , ממלאים בתור יחסים יסודיים של שיטת האכסיומות; היחס $=$ אין צורך בו אלא פעם אחת, בשעת בנין קבוצים בעלי אבר אחד (עמוד 5). ואח"כ נוכל תמיד להציג במקומו את היחסים $\neq, \varepsilon$ (ובכלל יהיה היחס $=$ מיותר אם נקבל לתוך האכסיומה II עוד את הדרישה לקבוצת בעל אבר יחיד הנמצאת באכסיומה II אצל $[Z]$, ז. א. אם נרחיק משם ומהגדרה א' את ההגבלה $a \neq b$; ראה לעיל עמוד 3). היחס $\neq$ אינו דרוש בכלל בהגדרה ו' והכאנו אותו רק לשם סימטריה.

כי ההגדרה ו' אינה יוצרת קשרים חדדים אסורים בין מושגי הפונקציה והקבוצה שבבניה (דבר הקשה לבחינה ב- $[Z]$ בין המושג "מגדר" והאכסיומות), נראה מתוך זה שבשעת בנית הפונקציה הננו מפיקים בהתאם להגדרה מספר פעולות סופי. שאלה סתומה היא עדיין, אם אי אפשר להצר עוד יותר את מושג הפונקציה, באופן שנוכל להוציא את בנית הקבוצה שבבניה מכלל הפעולות המשמשות לבנין הפונקציות; רק בשעה שנבוא להוציא משיטת האכסיומות את כל המסקנות כולן, יתברר הדבר אם תוכל הנבלה כזאת לתעשות. כמו כן תוכיח רק חקירה זו, שמושג הקבוצה שבבניה על פי ההגדרה ו' הנו רחב למדי בכדי לאפשר את בנית כל הקבוצים הבאים בתורת הקבוצים החזקות. משלים אחדים לכך ינתנו בסוף המאמר. לבסוף תורת הקבוצים תכלול לית משמשות איפוא שש האכסיומות המנויות להלן, לשם הקלת התשואה, בסדר תשוה לזה של $[Z]$, ולא בסדר ההגדרות המנויות לעיל. בו בזמן שהאכסיומה הראשונה באה בעיקר לשם קביעתו המדויקת של היחס היסודי ε , בדרשה

(1) במקרה שמתירים להשתמש בבנית קבוצה שבבניה בשעת בנית הפונקציה, הרי יהא דבר זה מותר רק עד כמה שהתוצאות לא תהיה תלויה ברב-ערכיות הפרוצס של בנית הקבוצה שבבניה; מטעמים אשר הבאתי לעיל הנני פאור כאן מבאור יותר ספורט של ענין זה.

שכל קבוצה היא קבוצה על פי כלל אבריה, הנה דורשות במידה שות חמש האכסיומות האחרות על יסוד מציאותו המונחת מראש של קבוצה ידוע את מציאותו של קבוצה אחר תלוי בראשון. אכסיומה I. אם m קבוצה תלוי של n , ו- n קבוצה תלוי של m כאחד (ז.א. שכל אבר של הקבוצה m הוא גם אבר של הקבוצה n , ולהפך), אז $n = m$. (אכסיומת הקבוצות). אכסיומה II. אם a ו- b קבוצים שונים זה מזה, אז מצוי קבוצה-הזוג של a ו- b (אכסיומת הזוג).

אכסיומה III. אם m קבוצה, R —אחד היחסים היסודיים $\neq, =, \in$, ותהיינה φ ו- ψ פונקציות, אז מצוי (בין הקבוצים התלויים של m) הקבוצה שבביררה $m \varphi R \psi$. (אכסיומת הביררה).

אכסיומה IV. אם m קבוצה, אז מצוי קבוצה-החזקה של m , $U m$. (האכסיומה של קבוצה-החזקה).

אכסיומה V. אם m קבוצה, אז מצוי הקבוצה שבביררה של m , $\mathcal{E} m$. (אכסיומת הצבירה).

אכסיומה VI. בתיות m קבוצה של אברים חסרי אברים משותפים וכל אחד מהם מכיל אברים⁽¹⁾, אז מצוי (בין הקבוצים התלויים של m) לכל הפחות קבוצה שבביררה אחד של m . (אכסיומת הבחירה). בהתאם לאכסיומה I אפשר לרשום או לצין לשם קצור את הקבוצה בעל האברים $a, b, \dots, c$, והמכיל רק את האברים האלה, בצורת $\{a, b, c, \dots\}$.

לבסוף אוסיף לשיטת-אכסיומות חדשה זו תאור קצר של הדרך המובילה ממנה אל תורת הקבוצים של קנטור, וקודם כל אל תאוריה של צרמלו. בהיות m קבוצה⁽²⁾, ננקח בהתאם להגדרה φ בתור R את היותם היסודי $\neq$, בתור ψ נקח בהתאמה את הפונקציה y ואת הקבוצה הקבוצה m , אז ישנו על סמך האכסיומה III הקבוצה שבביררה $m y \in m = N$, המכיל את כל האברים y ורק אותם אשר אינם אברים של m . לפיכך אין הקבוצה N מכיל שום אבר; על סמך ההגדרה φ יהיה איפוא N קבוצה תלוי של כל קבוצה. על סמך האכסיומה I יהיה N הקבוצה היחידה שאיננו מכיל שום אבר; קבוצה זו נצין כרגיל בתור קבוצה-האפס (רצונו: 0).

אם מצוי בכלל קבוצה m ⁽³⁾, אז מצויים תמיד שני קבוצים שונים, למשל m ו-0 או, במקרה $m = 0$, הקבוצה 0 וקבוצה החזקה $U 0$ השונה כמובן מ-0 (מפני היותם $0 \in U 0$). בהיות איפוא m ו- n שני קבוצים שונים זה מזה $\{n, m\} = p$ קבוצה-הזוג שלהם המצוי על סמך האכסיומה II, אז מצוי על סמך האכסיומה III הקבוצה שבביררה $p y = m$ המכיל בתור אברים את כל אלה האברים של p ורק את אלה השווים ל- m ; קבוצה שבביררה זו אפשר לרשום בצורת $\{m\}$. יחד עם כל קבוצה נתון m מצוי איפוא הקבוצה $\{m\}$ המכיל בתור אבר את הקבוצה m ושום קבוצה זולתו. ועי כן הרי לפנינו ההתאמה לאכסיומה II של $[Z]$ (האכסיומה של הקבוצים היסודיים⁽³⁾).

דרוש אם כן להוכיח קודם כל, שאפשר וכיצד אפשר להוציא על יסוד האכסיומה III את המסקנות ולבנות את המושגים ההכרחיים בתורת הקבוצים החזקה. ענין זה אשאיר למאמר

(1) על ההכרח שבחנאי הזה עיין לעיל ההערה בקשר עם ההגדרה φ .

(2) להלן (עמ' 6) יבואר אם מותר לעשות הנחה זו, ג.א. אם מותר בכלל להניח את מציאותו של איזה קבוצה.

(3) כאן הוא המקרה היחיד, אשר בו דרוש להשתמש בתוך ההגדרה φ ביחסים היסודיים $\neq, =$; כי על סמך

ההנחה שקבלנו כאן נוכל בכלל לכתוב $a \in \{b\}$ במקום $b = a$ וגם $a \notin \{b\}$ במקום $b \neq a$.

יותר מפורט. כאן אביא בכוון זה רק משל אחד פשוט, אבל בלתי טובן מאליו, אשר יראה ביחוד כיצד בונים ומשתמשים בפונקציות על יסוד ההגדרה $\mathfrak{A}$, ולשם השוואה ננהג במשל זה בהתאמה ל $[Z]$ (עמ' 264).

יהי $\{m, n, r, \dots\} = t$ קבוצה; ויהי עלינו לבנות על יסוד האבסטרקט את קבוצת האברים המשותפים $[m, n, r, \dots] = d$ של האברים של t . למטרה זו נבנת על יסוד ההגדרה $\mathfrak{A}$ (והאבסטרקט III) את הפונקציה $t \times y = X$, $(x \text{ יצין גדל בלתי קבוע})$, המכילה את כל האברים ורק את האברים y של t (ז.א. את כל הקבוצים ורק אותם הקבוצים $m, n, r, \dots$) אשר בהם בא בתור אבר הגדל הבלתי קבוע x ; X תלוי בבלתי קבוע x ורק בו. יציין נא m איזה אבר שהוא של t ונשוה לנגד עינינו את הקבוצה החלקי d של m המכיל את כל האברים ורק את האברים x של m אשר נורמים לשוויון $t = X$ או, במלים אחרות, $X \in \{t\}$; לפי הציונים של ההגדרה $\mathfrak{A}$ נכתב $m \times \{t\} = d$, והכונה היא ש x יצין את המשתנה העזר; תבלתי קבוע של הפונקציה X צריך איפוא לעבר על פני כל האברים של הקבוצה m . לפיכך יכול d את כל אלה האברים של m ורק את אלה האברים בתור אברים בזמן אחד בכל האברים $m, n, r, \dots$ של t ; הוא איפוא קבוצת האברים המשותפים.

משלים דומים לזה אפשר לבנות בלי קשי מיוחד. כדאי לציין את העובדה שדרך זו מספיקה גם להוכחת המשפט של קנטור $\overline{m} < \overline{m}$; פרוצס הבניה של קבוצים חלקיים עפ"י ההגדרה $\mathfrak{A}$ והאבסטרקט III הנהו איפוא כללי למדי בכדי לאפשר את המעבר מאיזו עצמה אינסופית שהיא אל עצמה יותר גדולה בעזרת שיטת הקרנול' כמו בתורת הקבוצים הרגילה. ע"י שיטת האבסטרקט המובאה כאן נתן יסוד לתורת הקבוצים הכללית. אך אין עדיין להסיק ממנה מסקנה שקבוצים מצויים בכלל. זאת אומרת שהתחום $\mathfrak{B}$ איננו ריק. מצד אחר אין הדרשה למציאות קבוצים נרדה מבטיחה מציאות קבוצים אינסופיים. לבסוף הנה גם, האבסטרקט של האינסופי של צרמלו (אבסטרקט VII ב $[Z]$) איננה מרחיקה לכת במדה הדרושה להבטחת המציאות של קבוצים רחבים למדי, למשל קבוצים אשר עצמתם היא $\aleph$ עם סימן טרנספיניטי (ראה [A] עמ' 230 וכו'). כאן דרושה יותר בתור אבסטרקט מוחלטה מציאות האבסטרקט VII אשר אחרי הרחבת מושג הפונקציה הנזכר לעיל תהיה להכללה רחבת של אבסטרקט האינסופי של צרמלו).

לבסוף אין התחום $\mathfrak{B}$ עדיין קבוע בשלמותו על ידי שבע האבסטרקט האלו; הן נותנות עוד מקום לקבוצים, אשר מציאותם אינה באה כתוצאה האבסטרקט ואשר לגבי תורת הקבוצים החוקית הנם בכל אופן מיותרים, ואולי אפילו מעוררים חשש, כך, למשל, ל ensembles extraordinaires אשר עסק בהם ד. מירימנוב²⁾. הצרת התחום הרצויה לפי זה תושג ע"י אבסטרקט אחרונה האבסטרקט VIII (אבסטרקט ההגבלה), הקיבעת בעקב את $\mathfrak{B}$ בתור התחום הכי צר המתאים לשבע האבסטרקטות; על ערך האבסטרקט הזאת ונסווחה עיין דברי במאמר אחר³⁾. על ידי שמונה האבסטרקט האלו, כפי שעלי עוד להוכיח, נתנה לתורת הקבוצים שיטת אבסטרקט שלמה ובלתי תלויה.

מרבוג ע"ל כ"ז תשרי תרפ"ג.

- (1) בעקב דרוש להציג באבסטרקט ההיא קבוצה כל שהוא במקום קבוצת-האס ω ופונקציה כל שהוא במקום הפונקציה $\{x\}$. פרטים בענין זה הנבאחי בהוצאתי בליפציג 1922.
- (2) עיין: L'Enseignement Mathématique, XIX^e Année (1917), p. 42.
- (3) [B] עמ' 233 וכו'. על הנסוח עיין גם השמוש באותו פירוש במאמרי: Axiomat. Begründung der transfiniten Kardinalzahlen, Math. Zeitschrift, Bd. 13 (1922), p. 163.