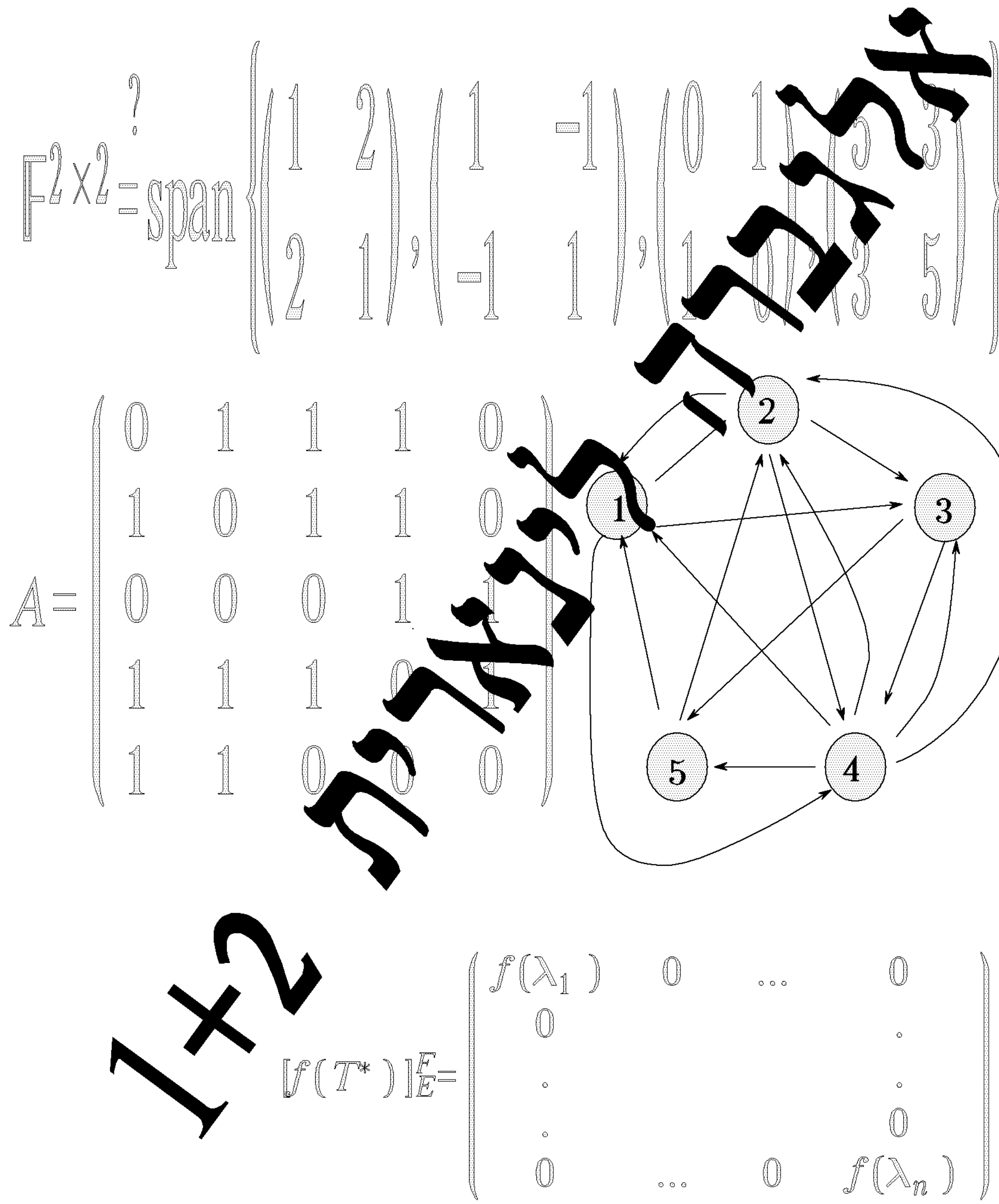
בס"ד



אלגברה לינארית 1+2

לימוד אינטראקטיבי ותירגול

מהדורה שישית: תשס"ד

ד"ר בועז צבאן
המחלקה למתמטיקה ולסטטיסטיקה
אוניברסיטת בר-אילן

תוכן העניינים

הערות. על התרגילים מופיעים הציונים הבאים: (^{0}) פירושו: טריויאלי, ניסוח אחר של ההגדרות. (*) פירושו קשה, או מופשט. ($^!$) פירושו מעניין מאד, או "מרחיב אופקים" (*ולעתים – אך לא מאד – גם קשה, או מופשט*). תרגיל "מרחיב אופקים" הוא תרגיל שהוא מעניין מעבר לאלגברה הלינארית שיש בו, ולעתים קרובות הוא שימושי גם לתחומים אחרים של המתמטיקה (כגון: אלגברה מופשטת/מבנים אלגבריים/תורת ה־K, קומבינטוריקה, אנליזה, התורה הארגודית/מערכות דינמיות, ואפילו תורת הגרפים ואלגוריתמים). בחוברת הזאת תמצאו לפחות דוגמא אחת מכל תחום.

הגדרות מופיעות בפונט כזה. השתדלתי להביא את ההגדרות העיקריות. הערות/רמזים/הדרכות מופיעים בפונט *כזה*. חלק מההערות הן הומוריסטיות, או מכילות "רכילות" היסטורית. הן נועדו לריענון בלבד.

השאלות שבתחילת כל נושא נפתרות בדרך כלל בהרצאה. השאלות שבאות מייד אחרי הגדרות הן שאלות הבנה טריויאליות, והכוונה היא שהתלמיד יבדוק בעזרתן אם הוא הבין את ההגדרות. שאר השאלות יתחלקו בין שיעור התרגיל, שיעורי הבית, וההכנה למבחן. חלק מהסעיפים מסומנים (ע"י סוגריים מרובעים [ ]) כאופציונליים, כשהכוונה היא שהתלמיד רק ינסה להבין למה הם נכונים, ולא יכתוב פתרון מלא עבורם.

מבנה ומקורות. החוברת בנויה לפי הסילבוס הרשמי של המחלקה. הסדר בתוך כל נושא הוא בדרך כלל לפי ההרצאות של רון עדין ושלי. מרבית התרגילים הם סטנדרטיים או שהומצאו במיוחד עבור החוברת. יש כאן גם כמה תרגילים הלקוחים מחוברות התרגילים של מינה טייכר (בר־אילן), ערן לונדון (מכללת הדסה), ומתרגילים של עוזי וישנה, דוד גרבר, לודה אפשטיין, ועוד. האנשים הבאים תרמו מספר פנינים: טומי קליין (בר־אילן), אביטל פרומקין (אונ' ת"א), ואריה יקיר (מכללת הדסה). דן גורלניק (טכניון) העיר כמה הערות חשובות והציע תרגילים מעניינים. חלק מהתרגילים לקוחים ממבחנים של מרצי המחלקה, ממויינים במידת האפשר בהתאם לנושא. דוד גרבר סייע לי בהגהת החוברת ובהצעת תרגילים משלימים. יותר ממה שנמצא כאן יש באמתחתי, אך "מה שהלב חושק הזמן עושק". אשמח לקבל הצעות והערות עבור המהדורה הבאה (דואר אלקטרוני: tsaban@math.biu.ac.il). אשתדל שהמהדורה העדכנית תופיע באינטרנט http://www.cs.biu.ac.il/~tsaban .

פרק א: שדות

1 שדות כלליים

שדה הוא מבנה $\langle \mathbb{F},+,\cdot,0,1\rangle$ המקיים הרבה תכונות, בעיקרון כל מה שעולה בדעתך כאשר אתה חושב על התכונות של החיבור, הכפל, 0 ו 1 בשדה הממשיים $\mathbb{R}$, למשל.

1.1 תרגיל[0]. כתוב את כל התכונות של החיבור, הכפל, 0 ו 1 בשדה הממשיים $\mathbb{R}$ שעולות בדעתך. השווה להגדרה המדוייקת (להלן) של שדה $\mathbb{F}$.

בצורה מדוייקת, **שדה** הוא קבוצה $\mathbb{F}$ עם פעולות $+$ (**חיבור**) ו $\cdot$ (**כפל**) על $\mathbb{F}$, כך שמתקיימות התכונות הבאות:

0. מוגדרות. לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מותאם איבר יחיד $a+b\in\mathbb{F}$ ואיבר יחיד $a\cdot b\in\mathbb{F}$.

1. חילוף. לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים: $a+b=b+a$, וכן $a\cdot b=b\cdot a$ (תכונה זאת נקראות גם **אָבֶּלִיוֹת** או **קוֹמוּטָטִיבִיוֹת**).

2. קיבוץ. לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$, מתקיים: $(a+b)+c=a+(b+c)$, וכן $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (תכונה זאת נקראות גם **אסוציאטיביות**).

3. איברים נייטרליים לחיבור ולכפל. קיימים איברים $0,1\in\mathbb{F}$ כך ש $0\neq 1$, ולכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $a+0=a$, וכן $a\cdot 1=a$.

4. איברים הופכיים.

לכל $a\in\mathbb{F}$ קיים **איבר נגדי** $-a\in\mathbb{F}$ כך ש $a+(-a)=0$,

ולכל $0\neq a\in\mathbb{F}$ קיים **איבר הופכי** $a^{-1}\in\mathbb{F}$ כך ש $a\cdot a^{-1}=1$.

5. פילוג. לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

1.2 תרגיל. כתוב מחדש את התכונות הנ"ל, כך שיתקבלו שלש קבוצות של תכונות: תכונות החיבור, תכונות הכפל, ותכונה הקשורה בו־זמנית לחיבור ולכפל.

1.3 תרגיל. יהא $\langle \mathbb{F},+,\cdot,0,1\rangle$ שדה. הוכח את התכונות הבאות:

א. **תכונות הצמצום.**

1) לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים: אם $a+c=b+c$, אזי $a=b$.

2) לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים: אם $ac=bc$, וכן $c\neq 0$, אזי $a=b$. (האם זה נכון גם עבור $c=0$?)

ב. הסבר מדוע התכונות הבאות נובעות ישירות מתכונות הצימצום שבסעיף א':

1) לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים: אם $c+a=c+b$, אזי $a=b$.

2) לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים: אם $ca=cb$, וכן $c\neq 0$, אזי $a=b$.

ג. לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $0\cdot a=a\cdot 0=0$.

ד. איבר $0\neq a\in\mathbb{F}$ נקרא **מחלק אפס** אם יש $0\neq b\in\mathbb{F}$ כך ש $ab=0$. בשדה אין מחלקי אפס.

ה. אם $0\neq a\in\mathbb{F}$, אז $(a^{-1})^{-1}=a$.

ו. לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $-(-a)=a$.

ז. לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $(-1)\cdot a=-a$.

ח. לכל שני איברים $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים $(-a)\cdot(-b)=ab$. [רמז: הראה שתמיד $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$]

1.4 תרגיל. **סכום של סדרה הנדסית.** יהא $\mathbb{F}$ שדה. הוכח שלכל $q\in\mathbb{F}$ (כך ש $q\neq 1$) מתקיים: $\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1+q+q^2+q^3+ \dots +q^n$. [רמז: נסמן $S=1+q+ \dots +q^n$. אזי $qS=q+q^2+ \dots +q^{n+1}$. חשב את $qS-S$]

2 דוגמאות ודוגמאות נגדיות של שדות

אחת הדוגמאות החשובות של שדה היא הדוגמה הבאה. יהא p מספר ראשוני. נכתוב $\mathbb{Z}_p=\{0,1, \dots ,p-1\}$. עבור מספר טבעי n, נכתוב "$n \bmod p$" עבור השארית המתקבלת כאשר מחלקים את n ב p. נגדיר חיבור וכפל על $\mathbb{Z}_p$ בצורה הבאה:

חיבור: $a\oplus b = a+b \bmod p$,

כפל: $a\otimes b = a\cdot b \bmod p$.

במלים, מבצעים חיבור או כפל של מספרים טבעיים, ולאחר מכן לוקחים את השארית שמתקבלת כאשר מחלקים את התוצאה ב p. לשם נוחיות, גם ב $\mathbb{Z}_p$ כותבים $+$ עבור חיבור ו $\cdot$ עבור כפל, למרות שהכוונה ל $\oplus$ ו $\otimes$ שהגדרנו.

2.1 תרגיל. חשב את החישובים הבאים ב $\mathbb{Z}_7$:

א. $1+4$, $2+5$, $3+6$.

ב. $1\cdot 4$, $2\cdot 5$, $3\cdot 6$.

ג. מצא איבר a כך ש $3+a=0$, ואיבר b כך ש $3\cdot a=1$. [רמז: בדוק את כל האפשרויות]

2.2 תרגיל. א. הראה ש 0 הוא נייטרלי לחיבור, ו 1 הוא נייטרלי לכפל ב $\mathbb{Z}_p$.

ב. הוכח שהחיבור והכפל ב $\mathbb{Z}_p$ קומוטטיביים.

ג. הראה שלכל איבר $a\in\mathbb{Z}_p$ קיים איבר נגדי. [רמז: התבונן ב $p-a$]

ד. הוכח שב $\mathbb{Z}_p$ אין מחלקי אפס.

ה. הוכח שלכל איבר $0\neq a\in\mathbb{Z}_p$ קיים איבר הופכי. [רמז: בעזרת (ג), הוכח שכל האיברים $a\cdot 1,a\cdot 2, \dots ,a\cdot(p-1)$, כאשר הכפל הוא של $\mathbb{Z}_p$, הם איברים ב $\mathbb{Z}_p$ ושונים זה מזה, לכן בהכרח אחד מהם שווה ל 1.]

2.3 תרגיל. א. הוכח ש $\mathbb{N}$ (עם הפעולות הרגילות) אינו שדה.

ב. כנ"ל עבור $\mathbb{Z}$.

ג. כנ"ל עבור $\mathbb{Z}_n$ כאשר $n=m\cdot k$ (כלומר n פריק). [רמז: מחלקי אפס]

ד. נגדיר מבנה $\langle\mathbb{F},+_{\mathbb{F}},\cdot_{\mathbb{F}},0_{\mathbb{F}},1_{\mathbb{F}}\rangle$ ע"י: $\mathbb{F}:=\mathbb{Z}_3$, $+_{\mathbb{F}}:=+_{\mathbb{Z}_3}$, $\cdot_{\mathbb{F}}:=\cdot_{\mathbb{Z}_3}$, $0_{\mathbb{F}}:=1_{\mathbb{Z}_3}$ ו $1_{\mathbb{F}}:=2_{\mathbb{Z}_3}$. האם

$\langle \mathbb{F}, +_{\mathbb{F}}, \cdot_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}} \rangle$ שדה?

ה. תהא $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ פונקציה חד-חד ערכית ועל (כלומר לכל $q\in\mathbb{Q}$ יש $n\in\mathbb{N}$ **יחיד** עבורו $f(n)=q$). **נגדיר** פעולות וקבועים על $\mathbb{N}$ בצורה הבאה:

לכל $n,m\in\mathbb{N}$: $n\oplus m:=f^{-1}(f(n)+_{\mathbb{Q}} f(m))$, **וכן** $n\odot m:=f^{-1}(f(n)\cdot_{\mathbb{Q}} f(m))$.

$\tilde{0}:=f^{-1}(0_{\mathbb{Q}})$, **וכן** $\tilde{1}:=f^{-1}(1_{\mathbb{Q}})$.

הוכח ש $\langle \mathbb{N},\oplus,\odot,\tilde{0},\tilde{1}\rangle$ שדה. [האין זה סותר את א' ?]

2.4 תרגיל*. בנה שדה בן 4 אברים. [רמז: אפשר לכתוב $\mathbb{F}=\{0,1,a,b\}$ (מדוע?). כעת יש להגדיר את לוחות החיבור והכפל. הגדר אותם כך שמתקיימות התכונות של שדה]

יהא $\langle \mathbb{F}, +_{\mathbb{F}}, \cdot_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}} \rangle$ שדה. אומרים ש $\mathbb{H}$ **תת-שדה** של $\mathbb{F}$ אם:

1) $0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}}\in\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$,

2) $\langle \mathbb{H}, +_{\mathbb{F}}, \cdot_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}} \rangle$ שדה.

משפט (קריטריון מקוצר לתת-שדה). יהא $\langle \mathbb{F}, +_{\mathbb{F}}, \cdot_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}} \rangle$ שדה. אם מתקיים:

1) $1_{\mathbb{F}}\in\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$,

2) לכל $a,b\in\mathbb{H}$ כך ש $b\neq 0$: $a-_{\mathbb{F}}b\in\mathbb{H}$, וכן $a\cdot_{\mathbb{F}}b^{-1}\in\mathbb{H}$.

אזי $\mathbb{H}$ **תת-שדה** של $\mathbb{F}$.

2.5 תרגיל. הוכח את הקריטריון המקוצר לתת-שדה.

2.6 תרגיל. הסבר מדוע $\mathbb{Z}_p$ (כאשר p ראשוני) אינו תת-שדה של $\mathbb{R}$.

2.7 תרגיל[0]. הוכח שלכל שדה $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}$ הוא תת-שדה של עצמו.

המקרה שמתואר בתרגיל האחרון משעמם. בשביל "להיפטר" ממנו מגדירים **תת-שדה ממש** (proper) להיות תת-שדה שאינו שווה לשדה עצמו.

2.8 תרגיל. א. יהא $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{R}$ תת שדה של $\mathbb{R}$. הוכח שלכל מספר ראשוני p, הקבוצה $\mathbb{F}[\sqrt{p}\,]:=\{a+b\sqrt{p} : a,b\in\mathbb{F}\}$ היא תת-שדה של $\mathbb{R}$. (בפרט, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]:=\{a+b\sqrt{2} : a,b\in\mathbb{Q}\}$ שדה)

[רמז: הפרד בין המקרה ש $\sqrt{p}\in\mathbb{F}$ למקרה $\sqrt{p}\notin\mathbb{F}$]

ב. האם $\mathbb{Q}_{\sqrt{2},\sqrt{3}}:=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} : a,b,c\in\mathbb{Q}\}$ שדה?

ג. האם $\mathbb{Q}_{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}}:=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} : a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}$ שדה?

הדרכה: א. הוכח שאם $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ כאשר $a,b\in\mathbb{Q}$, אז $b=0$.

ב. הוכח בצורה דומה, שאם $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ כאשר $a,b,c\in\mathbb{Q}$, אז $c=0$.

ג. הראה ש $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}\,]$: אם $\sqrt{2}\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, אז $\sqrt{3}(\sqrt{2}-c)=a+b\sqrt{2}$, ולכן (מדוע?) $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$, בסתירה ל(ב).

ג. השתמש בסעיף א' כדי להוכיח שלשדה $\mathbb{R}$ יש אינסוף תת-שדות שונים. [רמז: יש אינסוף מספרים ראשוניים שונים. התבונן בשדות $\mathbb{Q}[\sqrt{p}\,]$ כאשר p ראשוני. מדוע הם שונים זה מזה?]

3 שדה המרוכבים

נגדיר פעולות וקבועים על $\mathbb{C}:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b)\,:\,a,b\in\mathbb{R}\}$ בצורה הבאה: $0_{\mathbb{C}}:=(0,0)$, $1_{\mathbb{C}}:=(1,0)$, ולכל $(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$, נגדיר $(a,b)+_{\mathbb{C}}(c,d):=(a+c,b+d)$ וכן $(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(c,d):=(ac-bd,ad+bc)$.

3.1 תרגיל. א. הוכח ש $\langle\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R},+_{\mathbb{C}},\cdot_{\mathbb{C}},0_{\mathbb{C}},1_{\mathbb{C}}\rangle$ שדה. [צריך לעשות את זה פעם בחיים..]

ב. יהא נתון שדה $\mathbb{F}$ עם התכונה, שלכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $a^2+1\neq 0$. עם הגדרות כמו ב $\mathbb{C}$, אפשר להוכיח ש $\mathbb{F}\times\mathbb{F}$ שדה [בדיוק כאו שהוכחתם עבור $\mathbb{C}$, רק שצריך להזהר קצת יותר ולהשתמש בתכונה הנתונה]. כעת הוכח שהתכונה הנתונה היא הכרחית: נניח שקיים $a\in\mathbb{F}$ כך ש $a^2+1=0$. הוכח ש $\mathbb{F}\times\mathbb{F}$ הנ"ל אינו שדה. [בפרט, $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ לא יהיה שדה תחת ההגדרות הנ"ל].

3.2 תרגיל. נשנה את פעולת הכפל של $\mathbb{C}$ לפעולה הבאה: $(a,b)\cdot(c,d):=(a\cdot c,b\cdot d)$. האם $\mathbb{C}$ נשאר שדה?

סימון. אם $a\in\mathbb{R}$, נכתוב a במקום $(a,0)$. כמו כן, נכתוב i במקום $(0,1)$. לפי זה,

$$a+bi \;=\; (a,0)+(b,0)(0,1) \;=\; (a,b),$$

כלומר אנו כותבים $a+bi$ במקום (a,b).

3.3 תרגיל. נגדיר $\mathbb{Z}[i]:=\{a+bi\,:\,a,b\in\mathbb{Z}\}$. הוכח ש $\mathbb{Z}[i]$ אינו שדה.

לכל $z=a+bi\in\mathbb{C}$ נגדיר:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z) &= a,\\ \mathrm{Im}(z) &= b,\\ |z| &= \sqrt{a^2+b^2},\\ \bar{z} &= a-bi.\end{aligned}$$

3.4 תרגיל. לכל אחד מהביטויים הבאים:

א. חשב את הביטוי (כלומר הצג אותו בצורה $z=a+bi$),

ב. ציין מהם $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z),\bar{z},|z|$.

ואלו הביטויים: $(5+2i)+(2-3i)$, $(5+2i)-(2-3i)$, $(5+2i)\cdot(2-3i)$, $\frac{5+2i}{2-3i}$ (כלומר $((5+2i)\cdot(2-3i)^{-1}$).

3.5 תרגיל. הוכח את התכונות הבאות של מספרים מרוכבים z,z_1,z_2:

א. $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$, **וכנ"ל עבור** Im.

ב. $|\mathrm{Re}(z)|\leq|z|$.

ג. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

ד. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1+\overline{z}_2$; $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$.

ה. $z\cdot\overline{z} = |z|^2$.

ו. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

ז. **אי-שיוויון המשולש:** $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ (מהי המשמעות הגאומטרית?).

ח. **זהות המקבילית:** $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ (מהי המשמעות הגאומטרית?).

3.6 תרגיל. פתור את המשוואות הבאות מעל $\mathbb{C}$:

א. $z^4=-16i$.

ב. $2z^2-8z = 10-20i+12zi$.

3.7 תרגיל!. מצא $z=n+mi$, n ו m שלמים, כך ש $z^3=2+11i$. [רמז: היעזר בנתון ש n,m שלמים]

משפט דמואבר. נסמן $cis\theta:=\cos\theta+i\sin\theta$. אזי לכל $r\geq 0$, $n\in\mathbb{N},\theta\in\mathbb{R}$ מתקיים $(rcis\theta)^n=r^n\mathrm{cis}(n\theta)$.

3.8 תרגיל. א. יהא n מספר השנה הלועזית. חשב את $(1+\sqrt{3}i)^n$.

ב. הוכח: $\left(\dfrac{1+i\mathrm{tg}\theta}{1-i\mathrm{tg}\theta}\right)^n=\dfrac{1+i\mathrm{tg}(n\theta)}{1-i\mathrm{tg}(n\theta)}$ (לכל $n\in\mathbb{N}$). האם זה נכון לכל θ?

המשפט היסודי של האלגברה אומר, שלכל פולינום $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ (כאשר $n\geq 1$, $a_n\neq 0$, וכל $a_i\in\mathbb{C}$) יש **שורש** מרוכב (לפחות אחד), כלומר מספר $z\in\mathbb{C}$ עבורו $f(z)=0$.

נאמר שפולינום $h(x)$ **מחלק** את הפולינום $g(x)$ (ונכתוב $h(x)|g(x)$) אם יש פולינום $d(x)$ כך ש $g(x)=h(x)\cdot d(x)$.

3.9 תרגיל. א. הוכח שלכל n טבעי ולכל α, $(x-\alpha)|(x^n-\alpha^n)$. [רמז: התבונן בסכום ההנדסי $x^{n-1}+\alpha x^{n-2}+\ldots+\alpha^{n-2}x+\alpha^{n-1}$]

ב. הוכח שלכל פולינום $g(x)$, אם $g(\alpha)=0$, אז $(x-\alpha)|g(x)$. [רמז: במקרה זה, $g(x)=g(x)-g(\alpha)$]

ג. הוכח, בעזרת המשפט היסודי של האלגברה, שלכל פולינום $f(x)$ ממעלה n מעל $\mathbb{C}$ יש בדיוק n שורשים מרוכבים, ואפשר לכתוב $f(x)=c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$ כאשר c קבוע כלשהו, ו $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ הם שורשי הפולינום $f(x)$.

תהי $f(x)$ פונקציה כלשהי. נקודה (איבר בתחום של f) a המקיימת $f(a)=a$ נקראת **נקודת שֶׁבֶת**.

3.10 תרגיל!. א. הוכח שלכל פולינום $f(x)$ מעל $\mathbb{C}$, השונה מהפולינום $g(x)=x$, יש רק מספר סופי של נקודות שבת.

ב. הוכח שלא קיים פולינום $f(x)$ מעל $\mathbb{C}$, כך ש $f(z)=\overline{z}$ לכל $z\in\mathbb{C}$. [רמז: (א)]

$z\in\mathbb{C}$ הוא **שורש יחידה** מסדר n אם $z^n=1$. (לפי התרגיל האחרון, יש בדיוק n שרשי יחידה מסדר n)

3.11 תרגיל. יהא $n\geq 2$ טבעי, ויהא P אוסף שורשי היחידה מסדר n.

א. הוכח שקיים $z\in P$ כך ש: $P=\{1,z,z^2,\dots,z^{n-1}\}$.

ב. הראה שסכום אברי P הוא אפס. [רמז: סדרה הנדסית]

3.12 תרגיל!. א. תהא נתונה המשוואה $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0$ וידוע כי a_i ממשיים לכל $0\leq i\leq n$. הוכח שאם z הוא פתרון של המשוואה, אזי גם $\bar{z}$ הוא פתרון שלה.

ב. הוכח שכל פולינום עם מקדמים ממשיים ניתן להצגה כמכפלה של פולינומים ממעלה ≥ 2. [רמז: חשב את $(x-z)(x-\bar{z})$, והיעזר בכוח התרגילים הקודמים]

4 המאפיין של שדה

המאפיין של שדה $\mathbb{F}$ (מסומן $\mathrm{char}(\mathbb{F})$) הוא המספר הטבעי n **הקטן ביותר** כך שמתקיים:

$$n\cdot 1_{\mathbb{F}}:=\underbrace{1_{\mathbb{F}}+1_{\mathbb{F}}+\dots+1_{\mathbb{F}}}_{1\ \text{פעמים}\ n}=0_{\mathbb{F}}.$$

אם אין מספר כזה n, אומרים שהמאפיין הוא אפס.

באופן כללי, עבור $a\in\mathbb{F}$ ומספר טבעי $0<n$ נסמן

$$n\cdot a=\underbrace{a+a+\dots+a}_{a\ \text{פעמים}\ n}$$

(שים לב, לא מדובר בכפל בשדה, כיון שלא בהכרח מתקיים $n\in\mathbb{F}$).

4.1 תרגיל. יהא $\mathbb{F}$ שדה ממאפיין $0<n$. הוכח שלכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $n\cdot a=0$. [רמז: הראה ש $n\cdot a=(n\cdot 1)\cdot a$]

עבור קבוצה סופית A, נסמן ב $\#A$ את מספר האיברים בקבוצה A.

4.2 תרגיל. יהא $\mathbb{F}$ שדה סופי. הוכח: $\mathrm{char}(\mathbb{F})\leq\#\mathbb{F}$. [רמז: הראה שבסידרה $1,2\cdot 1,\dots,(n+1)\cdot 1$ של איברים ב $\mathbb{F}$ יש (לפחות) שני איברים שווים]

אם השדה סופי, אז המאפיין מחלק את גודל השדה.

4.3 תרגיל*. יהא $\mathbb{F}$ שדה סופי. אזי $\mathrm{char}(\mathbb{F})|\#\mathbb{F}$.

הדרכה: או. נסמן $H=\{0,1,1+1,1+1+1,\dots\}$. הוכח ש $\#H=\mathrm{char}(\mathbb{F})$.

ב. לכל $f\in\mathbb{F}$, נסמן $f+H=\{f+h\ :\ h\in H\}$. הוכח שמתקיים: $\bigcup_{f\in\mathbb{F}}(f+H)=\mathbb{F}$.

ג. הוכח שלכל $f,g\in\mathbb{F}$ מתקיים בדיוק אחד מהשניים: או ש $f+H=g+H$, או ש $(f+H)\cap(g+H)=\emptyset$. [רמז: אם יש איבר $a\in(f+H)\cap(g+H)$, אזי ניתן להציגו בשני אופנים $f+h_1=a=g+h_2$ כאשר $h_1,h_2\in H$. לכן $f-g=h_2-h_1\in H$ (מדוע?), וכן $g-f=h_1-h_2\in H$. השתמש בכך כדי להוכיח ש $f+H\subseteq g+H$ (היעזר בזהות $f+h=g+(g-f)+h$) וכן $g+H\subseteq f+H$ (דומה).]

ד. הוכח שלכל $f\in\mathbb{F}$ מתקיים $\#H=\#(f+H)$. [רמז: נגדיר פונקציה $\Phi:H\to f+H$ ע"י $\Phi(h)=f+h$. הוכח שהינו חח"ע ועל]

ה. נסמן $p=\#H$. לפי טו', $p=\text{char}(\mathbb{F})$. לפי ג'+ד', $\mathbb{F}$ הינו איחוד של קבוצות זרות מגודל p. נסמן את מספר הקבוצות הזרות ב n. אזי $\#\mathbb{F}=np$, לכן $p|\#\mathbb{F}$.

4.4 תרגיל. א. הוכח שאם $\text{char}(\mathbb{F})\neq 0$, אזי $\text{char}(\mathbb{F})$ הוא מספר ראשוני. [רמז: הוכח ש $(n\cdot 1_{\mathbb{F}})\cdot(m\cdot 1_{\mathbb{F}})=(nm)\cdot 1_{\mathbb{F}}$]

ב. היעזר בסעיף א' ובתרגיל קודם לחשב את המאפיין של שדה שגודלו 4. אם אתה מכיר שדה שגודלו 4 (תרגיל 2.2), מצא את המאפיין שלו לפי ההגדרה ואמת את מסקנתך. הכלל את הרעיון: מהו המאפיין של שדה שגודלו p^n (p ראשוני, n טבעי כלשהם)?

ג. מצא את $\text{char}(\mathbb{Q})$.

ד. יהא $\mathbb{F}$ שדה, ויהא $\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$ תת שדה. הוכח ש $\text{char}(\mathbb{H})=\text{char}(\mathbb{F})$.

ה. מהם $\text{char}(\mathbb{R})$; $\text{char}(\mathbb{C})$?

4.5 תרגיל. א. יהא $\mathbb{F}$ שדה ממאפיין אפס. הוכח: $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{F}$.

ב. יהא $\mathbb{F}$ שדה ממאפיין p. הוכח: $\mathbb{Z}_p\subseteq\mathbb{F}$.

(ליתר דיוק, השדות הנ"ל מכילים "עותקים" של $\mathbb{Q}$ ושל $\mathbb{Z}_p$, בהתאמה)

ג. מצא שדה ממאפיין אפס, שאין לו תת-שדה ממש.

ד. יהא p ראשוני. מצא שדה ממאפיין p, שאין לו תת-שדה ממש.

יהיו n,m מספרים טבעיים. הסימון $n|m$ פירושו: n **מחלק את** m (כלומר יש מספר טבעי k כך ש $kn=m$).

4.6 תרגיל!. יהא p מספר ראשוני. נסמן $\binom{p}{k}:=\frac{p!}{k!(p-k)!}$ $(=C_p^k)$. לכל $0<k<p$, $p|\binom{p}{k}$, שכן p מחלק את המונה של הביטוי, וזר למכנה שלו.

א. **ההומומורפיזם של פְרוֹבֶּנְיוּס**: יהא $\mathbb{F}$ שדה ממאפיין ראשוני p. הוכח שלכל $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים $(a+b)^p=a^p+b^p$. [רמז: השתמש בנוסחת הבינום של ניוטון $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$]

ב. השתמש ב(א) להוכיח את **משפט פרמה הקטן** (לא פרמה קטן, אלא המשפט הקטן): לכל $a\in\mathbb{Z}_p$, $a^p=a$. [רמז: אינדוקציה על a, $0\leq a<p$]

ג. יהא $\mathbb{F}$ שדה ממאפיין ראשוני p. הראה ש $\mathbb{Z}_p\subseteq\mathbb{F}$ (ולכן האיברים $0,1,\ldots,p-1\in\mathbb{F}$ מקיימים $a^p=a$) והוכח שלכל $a\in\mathbb{F}$ שאינו שייך ל $\mathbb{Z}_p$ לא מתקיים $a^p=a$. [רמז: כמה שורשים יכולים להיות לפולינום x^p-x?]

4.7 תרגיל*. **שְׂדוֹת תּוּת לָנֶצַח**: מצא שדה אינסופי, שהמאפיין שלו שונה מאפס.

הדרכה: יהא p ראשוני כלשהו, ויהא $\mathbb{Z}_p[x]$ אוסף הפולינומים ב x עם מקדמים מ $\mathbb{Z}_p$ (כגון $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ כאשר כל $a_i\in\mathbb{Z}_p$).

נסמן $\mathbb{Z}_p(x):=\left\{\frac{f(x)}{g(x)}:f(x),g(x)\in\mathbb{Z}_p[x];\ g(x)\neq 0\right\}$ (שים לב: סוגריים עגולים). כעת נגדיר את החיבור, הכפל, והקבועים ב $\mathbb{F}_p$ בצורה הבאה:

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{q(x)}{h(x)} := \frac{f(x)h(x)+q(x)g(x)}{g(x)h(x)}\ ;\ \frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{q(x)}{h(x)} := \frac{f(x)q(x)}{g(x)h(x)};\ 0_{\mathbb{F_p}}:=\frac{0}{1};\ 1_{\mathbb{F_p}}:=\frac{1}{1}$$

נקבל שדה (אל תוכיח, זה מעייף). כדי להבין מה קורה פה, בחר שני איברים לא טריויאליים בשדה $\mathbb{F}_p$ (כאלו שהמכנה שלהם הוא פולינום ממעלה>0) וחשב את מכפלתם ואת סכומם עד לקבלת ביטוי מהצורה $\frac{f(x)}{g(x)}$. הוכח ש $\mathrm{char}(\mathbb{F}_p)=p$. [רמז: תרגיל הקודם]

פרק ב: משוואות לינאריות

1 משוואות לינאריות

סימונים. מערכת של m משוואות ב n נעלמים (מעל $\mathbb{F}$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

, או בקיצור:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- האיברים $a_{ij}\in\mathbb{F}$ $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots n)$ נקראים **מקדמי המשוואות**.
- האיברים x_i $(i=1,\ldots,n)$ נקראים **נעלמים**, או **משתנים**.
- האיברים $b_j\in\mathbb{F}$ $(i=1,\ldots,m)$ נקראים **קבועים**, או **איברים חופשיים**.

כיון ששמות המשתנים לא חשובים (למערכת יהיו אותם פתרונות גם אם נכתוב משתנים אחרים), נוהגים להשמיט אותם ולכתוב רק את המקדמים, ואת הקבועים:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

הקו האנכי נועד להבדיל בין המקדמים לקבועים. כאשר כל הקבועים שוים לאפס (במקרה זה המערכת נקראת **הומוגנית**), משמיטים גם את עמודת הקבועים ואת הקו האנכי. נשארים עם דבר דמוי "קרטון ביצים" (רק שבמקום ביצים – יש מספרים, או איברים של השדה):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(בלשון המעטה, האנלוגיה ל"קרטון ביצים" לא מושלמת. עם מטריצות אפשר לעשות הרבה דברים שנובעים מהתכונות של שדה – וכל זאת נלמד ונתרגל בקורס זה – מה גם שעל מספרים לא צריך לשמור שלא "ישברו ...).

1.1 תרגיל. כתוב את המערכות הבאות בצורה מפורשת (אל תפתור!):

א. $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 70 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 90 \\ 2 \end{pmatrix}$; ב. $(10)(x_1)=(100)$ [שים לב: כאן המטריצות הן 1×1]

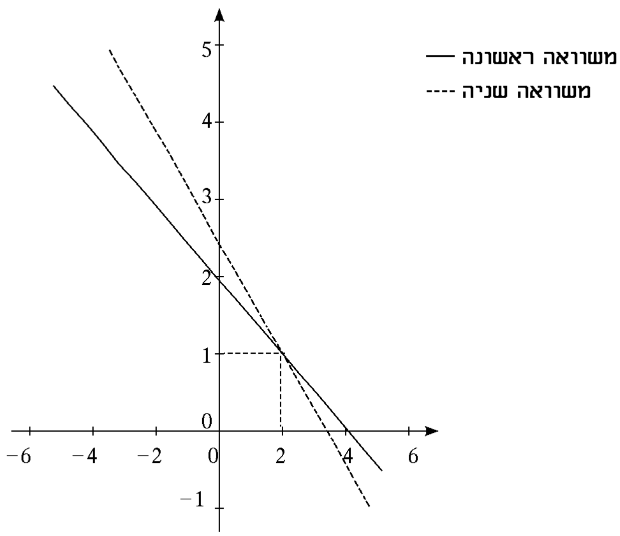
1.2 תרגיל. א. מצא מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים (מעל $\mathbb{R}$), שאין לה פתרון.

ב. כנ"ל עם משוואה אחת בנעלם אחד.

ג. האם תוכל לחזור על סעיפים (ב) ו(ג) עבור מערכת הומוגנית? הסבר!

פתרון מערכת לינארית בצורה גרפית מושג ע"י שרטוט הישרים שמייצגות המשוואות. הפתרונות הם נקודות החיתוך של הישרים.

נדגים זאת ע"י המערכת $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$. מערכת זו שקולה למערכת $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2} \end{cases}$. נצייר את הישרים המתאימים:



יש נקודת חיתוך אחת (ולכן פתרון יחיד): $(x,y)=(2,1)$.

1.3 תרגיל. פתור את המערכות הבאות (מעל $\mathbb{R}$) בצורה גרפית:

א. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$; ב. $\begin{cases} 3x+5y=7 \\ 9x+15y=0 \end{cases}$; ג. $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 6x+12y=0 \end{cases}$.

מערכות של משוואות נקראות **שקולות** אם יש להן בדיוק אותם פתרונות.

1.4 תרגיל. בדוק האם המערכות הבאות (שמיוצגות ע"י מטריצות) שקולות (מעל $\mathbb{R}$):

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$.

ג. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$ ו $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 15 & 0 \end{array}\right)$.

ד. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$ ו $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 7 \\ 8 & 12 & 20 \end{array}\right)$.

1.5 תרגיל. א. פתור מעל $\mathbb{C}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1+i & 2 \\ -i & 1 & 0 & 2 \\ 1-i & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$. ב. פתור מעל $\mathbb{Z}_{11}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 7 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 3 \end{array}\right)$.

1.6 תרגיל. פתור את המערכת מעל $\mathbb{Z}$ (בשיטת גאוס, מבלי להשתמש בחילוק – רק מותר להשתמש בצמצום), או הוכח שאין פתרון מעל $\mathbb{Z}$:

א. $\begin{cases} 16x+18y = 34 \\ 18x+39y = 57 \end{cases}$ **ב**. $\begin{cases} 2x+4y+6z = 8 \\ 3x+6y+10z = 4 \\ 4x+8y+2z = 9 \end{cases}$

1.7 תרגיל. מצא מערכת משוואות עם בדיוק 49 פתרונות שונים.

1.8 תרגיל. לכל אחת מהמערכות הבאות (כולן מעל $\mathbb{R}$), מצא לאילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד; לאילו ערכים אין פתרון; ולאילו ערכים יש אינסוף פתרונות (במקרה של אינסוף פתרונות – מצא את הפתרון הכללי):

א. $\begin{cases} (4a-4)x_1+(a+1)x_2+2ax_3 = 3 \\ (2a-2)x_1+(a+1)x_2+ax_3 = 2 \\ (3a-3)x_1+(a+1)x_2+ax_3 = 3 \end{cases}$.

ב. $\begin{cases} x+y+az = a \\ ax+ay+z = 1 \\ x+ay+az = 2 \end{cases}$.

ג. $\begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3 = 4 \\ ax_1+(a-1)x_2-x_3 = a+3 \\ x_1+(a-1)x_2+(a-3)x_3 = 7 \end{cases}$.

$1.8\frac{1}{2}$ תרגיל. נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$ עם שני פרמטרים a,t. מצא לאילו ערכים של a ו t יש למערכת פתרון יחיד; לאילו ערכים אין פתרון; ולאילו ערכים יש אינסוף פתרונות (במקרה של אינסוף פתרונות – מצא את הפתרון הכללי):

$$\begin{cases} x+ay+z = 1 \\ ax+a^2y+z = 2+a \\ ax+3ay+z = 2-t \end{cases}.$$

1.9 תרגיל!. מצא מטריצה $A\in\mathbb{R}^{4\times4}$ התלויה בפרמטר λ, כך שלכל וקטור $b\in\mathbb{R}^4$ ולכל ערך של λ יש פתרון למערכת $Ax=b$.

2 תרגום בעיות לא-לינאריות לבעיות לינאריות

2.1 תרגיל!. א. פתור את המערכת הבאה: $\begin{cases} xy^2z^3 = 2 \\ x^4y^5z^6 = \frac{1}{4} \\ x^6y^8z^9 = 8 \end{cases}$.

[רמז: הוצא $\log$ בבסיס 2 משני האגפים וסמן $X=\log_2x$ וכו'. תקבל מערכת לינארית. לאחר שתמצא את X,Y,Z, שחזר את x,y,z]

ב. אם פתרת את הסעיף הקודם לפי הרמז, אז הנחת שכל המשתנים x,y,z הם חיוביים (אחרת אי אפשר להוציא $\log$). פתור את המערכת ישירות, בלי הנחה זאת. [רמז: אפשר לעקוף את הבעיה. למשל, אם אנחנו רוצים לכפול בסקלר α את כל החזקות המופיעות במשוואה מסויימת – נעלה את שני האגפים בחזקת α. כדי לחסר

את החזקות המופיעות בשורה מסויימת מהחזקות המופיעות בשורה אחרת – נחלקן זו בזו. כך אפשר לבצע פעולות על החזקות שדומות לפעולות של ליכסון מטריצה]

2.2 תרגיל[!]. פתור את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} 2a^2+ab+3c^2 &= 31\\ ab+ac+4bc &= 29\\ ac+b^2+5c^2 &= 52\\ a^2+b^2+bc &= 11\\ -ab+bc+c^2 &= 13\\ 3ac+c^2 &= 18 \end{cases}$$

[רמז: הגדר $x_1=a^2,\ x_2=ab$ וכו' עבור כל המכפלות שמופיעות במערכת $(a^2,\ ab,\ ac,\ b^2,\ bc,\ c^2)$ סה"כ 6 משתנים חדשים. פתור את המשוואות הלינאריות שמתקבלות, ושחזר את a,b,c. וראה הערה להלן]

בתרגיל האחרון מופיעות משוואות שאם נכתוב אותן בצורה מטריצית, נקבל מטריצה גדולה, שרוב ערכיה הם אפס. מטריצה שרוב ערכיה הם אפס נקראת **מטריצה דלילה**, ומערכת משוואות שצורתה המטריצית היא דלילה נקראת **מערכת משוואות דלילה**. מערכת משוואות דלילה לא כדאי לפתור בעזרת ההצגה המטריצית, אלא ישירות (*למשל בשיטת ההצבה*), כיון שההצגה המטריצית במקרה זה היא בזבזנית.

פרק ג: אלגברת המטריצות

1 שויון מטריצות

סימונים. $\mathbb{F}^{m\times n}:=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} : a_{ij}\in\mathbb{F}\ \ (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)\right\}$ **אוסף המטריצות** $m\times n$ **מעל השדה** $\mathbb{F}$. מסומן גם: $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. הביטוי $m\times n$ נקרא **סדר המטריצה**.

מטריצות מסדר $1\times n$ (אברי $\mathbb{F}^{1\times n}$) נקראות **וקטורי שורה**.

מטריצות מסדר $n\times 1$ (אברי $\mathbb{F}^{n\times 1}$) נקראות **וקטורי עמודה**.

כשהכתיב בשורה/עמודה לא משנה, אברי $\mathbb{F}^{1\times n}$ ו $\mathbb{F}^{n\times 1}$ נקראים פשוט **וקטורים**, ומסומנים $\mathbb{F}^n$. [זה למעשה מקרה פרטי של מושג יותר כללי שנקרא "וקטור". נפגוש הכללה זאת בפרק הבא]

המרחב $\mathbb{F}^{n\times n}$ מסומן גם: $M_n(\mathbb{F})$ (במקום $M_{n\times n}(\mathbb{F})$).

1.1 תרגיל^0. כתוב את הסדר של כל אחת מהמטריצות הבאות.

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$; ב. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4\end{pmatrix}$; ג. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6\end{pmatrix}$; ד. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$; ה. (1); ו. $(1\ \ 2)$; ז. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\end{pmatrix}$.

מטריצות $A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו $B=(b_{ij})\in\mathbb{F}^{k\times l}$ הן **שוות** אם:

א. $k=m$ וכן $l=n$,

ב. לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$ מתקיים $a_{ij}=b_{ij}$.

במקרה זה כותבים $A=B$.

1.2 תרגיל^0. הסבר מדוע אין שתי מטריצות שוות בתרגיל הקודם (הנח שכולן מעל $\mathbb{R}$).

2 חיבור מטריצות וכפל סקלר במטריצה

החיבור של שתי מטריצות $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ (מוגדר רק כשהן מאותו סדר) מתבצע ע"י חיבור האיברים במקומות החופפים:

$C=A+B$ פירושו: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

כפל סקלר $\alpha\in\mathbb{F}$ **במטריצה** $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדר ע"י כפל כל אחד מרכיבי המטריצה A ב α:

$C=\alpha A$ פירושו: $c_{ij}=\alpha a_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

מטריצת האפס $O\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדרת ע"י $o_{ij}=0$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

המטריצה הנגדית $C=-A$ של מטריצה A מוגדרת על ידי $c_{ij}=-a_{ij}$.

2.1 משפט. הוכח את התכונות הבאות, עבור מטריצות $A,B,C\in\mathbb{F}^{m\times n}$, וסקלרים $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$:

א. $A+B=B+A$.

ב. $A+(B+C)=(A+B)+C$.

ג. $A+O=O+A=A$.

ד. $A+(-A)=(-A)+A=O$.

ה. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

ו. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

ז. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

ח. $0A=O$, ו $1A=A$.

3 כפל מטריצות

הכפל $C=AB$ של שתי מטריצות $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ (מוגדר רק כאשר מספר העמודות ב A שווה למספר השורות ב B) מתבצע בצורה הבאה:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} := a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+ \dots +a_{in}b_{nj}$$

לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,k$. התוצאה היא המטריצה $C=(c_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times k}$.

3.1 תרגיל. חשב את המכפלות הבאות, או הסבר מדוע אינן מוגדרות:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ב. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; ג. $(1 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; ד. $(1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$;

ה. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(4 \quad 5 \quad 6)$.

3.2 תרגיל. באיזו מטריצה יש לכפול מימין את $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ כדי לקבל את המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$? [רמז: משוואות לינאריות על עמודות המטריצה הנעלמת]

3.3 תרגיל. הוכח שבכל אחד מהמקרים הבאים, אם המכפלה באחד האגפים מוגדרת, אז גם המכפלה באגף השני מוגדרת, ותוצאתן שווה:

א. $A(BC)=(AB)C$.

ב. $A(B+C)=AB+AC$.

ג. $(B+C)A=BA+CA$.

ד. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$ (כאשר $\alpha\in\mathbb{F}$).

ה. $AO=O$ וכן $OA=O$.

הסימון המקוצר עבור מערכת משוואות

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

מתאים בדיוק להגדרת כפל מטריצות (בדוק!). יתר על כן, כשחושבים על מערכת משוואות כמוצגת על ידי כפל מטריצות יותר קל לנתח את תכונותיה. המשפט המובא בתרגיל הבא, שמצביע על קשר בין הפתרונות של מערכת לא–הומוגנית לפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה לה, מדגים זאת.

3.4 תרגיל. נתונה מערכת של m משוואות ב n נעלמים: $Ax=b$. נסמן ב $H=\{v\in\mathbb{F}^n : Av=0\}$ את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה, וב $L=\{v\in\mathbb{F}^n : Av=b\}$ את קבוצת הפתרונות של המערכת הלא–הומוגנית. הוכח את הטענות הבאות:

א. אם $L\neq\emptyset$, אז לכל $v_0\in L$ מתקיים $L=v_0+H$, כאשר הסימון v_0+H פירושו $\{v_0+w : w\in H\}$. [במלים: פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית ועוד פתרון כללי של המערכת ההומוגנית]

ב. הסק: אם $v_0\in L$, אז $H=L-v_0=\{v-v_0 : v\in L\}$.

ג. הוכח: אם $L\neq\emptyset$, אז $\#H=\#L$.

ד. מצא מקרה שבו $\#L=0<1=\#H$.

ה. מצא מקרה שבו $\#L=0<\infty=\#H$.

ו. מצא מקרה שבו $\#L=0<7=\#H$.

ז. נתון ש $m=n$. מה תוכל לומר על הגודל של H כאשר $L=\emptyset$? [רמז: מהם המקרים שבהם, לאחר דירוג המטריצה $(A|b)$, מחליטים שאין פתרון?]

3.5 תרגיל. התבונן בפתרונות למערכות הלא–הומוגניות שמצאת בתרגיל 1.8 שבפרק הקודם, במקרים שיש פתרון אחד או יותר. מצא, מתוך פתרונות אלו, את הפתרונות של המערכות ההומוגניות המתאימות. [רמז: תרגיל קודם]

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

- יהא $1\leq i\leq m$. **השורה** (row) ה i של A (מסומנת: $\mathrm{R}_i(A)$) היא הוקטור $v\in\mathbb{F}^{1\times n}$ המקיים $v_j=a_{ij}$ לכל $j=1, \dots, n$.
- יהא $1\leq j\leq n$. **העמודה** (column) ה j של A (מסומנת: $\mathrm{C}_j(A)$) היא הוקטור $v\in\mathbb{F}^{n\times 1}$ המקיים $v_i=a_{ij}$ לכל $i=1, \dots, m$.

עבור $i=1, \dots, n$, נסמן ב e_i את הוקטור ב $\mathbb{F}^n$ שכולו אפסים פרט למקום ה i, שבו כתוב 1.

3.6 תרגיל. יהיו נתונות מטריצות $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$, $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, ותהא $C=AB\in\mathbb{F}^{m\times k}$. הוכח:

א. $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{C}_i(A)$. בפרט, $Ae_i=\mathrm{C}_i(A)$ (כאן e_i מציין וקטור יחידה).

ב. $A=\sum_{i=1}^{m} x_i \mathrm{R}_i(A)$ $\left(x_1,\ldots,x_m\right)$. בפרט, $e_iA=\mathrm{R}_i(A)$ (כשו e_i וקטור שורה).

ג. **כפל שורה–שורה:** $\mathrm{R}_i(C)=\mathrm{R}_i(A)\cdot B$.

ד. **כפל עמודה–עמודה:** $\mathrm{C}_i(C)=A\cdot \mathrm{C}_i(B)$.

((ג–ד) במילים אחרות: $AB=\begin{pmatrix}\mathrm{R}_1(A)B\\ \mathrm{R}_2(A)B\\ \vdots\\ \mathrm{R}_m(A)B\end{pmatrix}$, ובאופן דומה $AB=\left(A\mathrm{C}_1(B),A\mathrm{C}_2(B),\ldots,A\mathrm{C}_k(B)\right)$)

3.7 תרגיל. תהא נתונה מערכת $Ax=b$. יהיו v פתרון למערכת הלא–הומוגנית, ו w פתרון למערכת ההומוגנית $Ax=0$. נתבונן במטריצה שעמודותיה הם הוקטורים הבאים $B=(v,w,v+w,v-w,w-v)$. חשב את המטריצה AB. [ראו: תרגיל קודם]

המטריצה הבסיסית $E_{ij}\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדרת ע"י אפס בכל המקומות, פרט למקום ij שבו יש 1.

3.8 תרגיל. הוכח שעבור $E_{ij},E_{kl}\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים:

א. $E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}E_{il} & j=k\\ O & j\neq k\end{cases}$.

ב. לכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, AE_{ij} היא המטריצה שכל עמודותיה הן 0 פרט לעמודה j שלה השווה לעמודה i של A.

ג. לכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $E_{ij}A$ היא המטריצה שכל שורותיה הן 0 פרט לשורה i שלה השווה לשורה j של A.

ד. לכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $E_{ij}AE_{kl}=a_{jk}E_{il}$.

[אפשר להיעזר בתרגיל קודם]

4 המטריצה המשוחלפת (transpose)

תהי $A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n}$. **המטריצה המשוחלפת** $A^t=(b_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times m}$ מוגדרת ע"י: $b_{ij}=a_{ji}$ (לכל $i=1,\ldots,m$ ו $j=1,\ldots,n$).

4.1 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, ויהא $\alpha\in\mathbb{F}$. הוכח:

א. $(\alpha A)^t=\alpha A^t$.

ב. $(A^t)^t=A$.

ג. הראה, בעזרת הסעיפים הקודמים, שמתקיים $(\alpha A^t)^t=\alpha A$.

4.2 תרגיל. , הוכח את התכונות הבאות:

א. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$. הוכח: $(A+B)^t=A^t+B^t$.

ב. יהיו $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$. הוכח שהכפל B^tA^t מוגדר היטב, ומתקיים $(AB)^t=B^tA^t$.

ג. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. הוכח: $(\alpha B^t(A+\beta B^tA^t))^t=\alpha A^tB+\alpha\beta AB^2$.

$4.2\frac{1}{2}$ תרגיל. הראה כיצד ניתן להסיק את האמור בסעיף (ב) של תרגיל 3.6 מסעיף (א) של אותו תרגיל. האם ניתן להסיק את (א) מ(ב) בצורה דומה?

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ היא **סימטרית** אם $A^t=A$.

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ היא **אנטי־סימטרית** אם $A^t=-A$.

4.3 תרגיל[0]. הוכח שאם $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ היא סימטרית, או אנטי־סימטרית, אז $m=n$.

4.4 תרגיל. א. הוכח שלכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, המטריצה AA^t היא סימטרית.

ב. הוכח שלכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, המטריצה $A+A^t$ סימטרית, והמטריצה $A-A^t$ אנטי־סימטרית.

אברי האלכסון של מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הם האברים $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$.

4.5 תרגיל. א. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה אנטי־סימטרית. הוכח שכל אברי האלכסון של A שוים לאפס.

ב. האם הטענה נכונה גם עבור $A\in\mathbb{Z}_2^{n\times n}$? אפיין את השדות שעבורם הטענה נכונה (ואת אלו שעבורם הטענה אינה נכונה).

4.6 תרגיל. א. נתון שמטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ היא סימטרית **וגם** אנטי־סימטרית. הוכח ש $A=O$.

ב. יהא $\mathbb{F}$ שדה, כך שכל מטריצה סימטרית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ היא גם אנטי־סימטרית. מצא את המאפיין של $\mathbb{F}$.

5 מטריצות ריבועיות

מטריצה מסדר $n\times n$ נקראת **מטריצה ריבועית**.

5.1 תרגיל. הוכח שלכל מטריצה A, המטריצה AA^t היא ריבועית.

מטריצת היחידה, או **הזהות** $I=(\delta_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדרת ע"י $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$.

5.2 תרגיל. הוכח, בעזרת תרגיל 3.6, שלכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מתקיים $IA=A$ (כאשר $I\in\mathbb{F}^{m\times m}$) וכן $AI=A$ (כאשר $I\in\mathbb{F}^{n\times n}$).

מחלקות מיוחדות של מטריצות ריבועיות. מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת:

- **משולשית עליונה**: אם לכל $j<i$, $a_{ij}=0$ (כלומר, האברים מתחת לאלכסון הם אפס).
- **משולשית תחתונה**: אם לכל $i<j$, $a_{ij}=0$ (האברים מעל האלכסון הם אפס).
- **משולשית**: אם היא משולשית עליונה או תחתונה.
- **אלכסונית**: אם לכל $i\neq j$, $a_{ij}=0$ (כל האברים פרט לאלכסון הם אפס).
- **סקלרית**: אם $A=\alpha I$ לאיזשהו α.
- **זהות**, או **יחידה**: אם $A=I$.

5.3 תרגיל[0]. הוכח שכל אחת מארבע התכונות האחרונות גוררת את התכונה שלפניה, אבל ההיפך אינו נכון. כלומר:

א. כל מטריצת זהות היא סקלרית, אבל לא כל מטריצה סקלרית היא זהות.

ב. כל מטריצה סקלרית היא מטריצה אלכסונית, אבל לא כל מטריצה אלכסונית היא סקלרית.

ג. כל מטריצה אלכסונית היא מטריצה משולשית, אבל לא כל מטריצה משולשית היא אלכסונית.

5.4 תרגיל[0]. הוכח את הטענות הבאות:

א. כל מטריצה משולשית עליונה וגם תחתונה היא אלכסונית.

ב. כל מטריצה אלכסונית שאברי האלכסון שלה שווים זה לזה היא סקלרית.

5.5 תרגיל. מצא אילו מבין המחלקות הנ"ל סגורות לכפל, ואילו לא.

יהיו נתונות $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אומרים ש A,B **מתחלפות** אם $AB=BA$.

5.6 תרגיל. ראינו 6 מחלקות מיוחדות של מטריצות ריבועיות. מצא את המחלקה הגדולה ביותר מביניהן כך שכל שתי מטריצות במחלקה מתחלפות. עליך להוכיח:

א. כל שתי מטריצות במחלקה מתחלפות.

ב. תכונה זאת לא מתקיימת במחלקות שמכילות אותה (אספיק להראות עבור המחלקה הקטנה ביותר שמכילה אותה. מדוע?).

5.7 תרגיל. א. הוכח שמטריצה סקלרית מסדר $n\times n$ מתחלפת עם כל מטריצה מאותו סדר.

ב. הוכח שכל מטריצה המתחלפת עם כל המטריצות מסדר $n\times n$ היא סקלרית. [רמז: מטריצות בסיסיות]

5.8 תרגיל. נתון ש A,B מטריצות סימטריות. הוכח: AB סימטרית $\Leftrightarrow$ A,B מתחלפות.

5.9 תרגיל. א. יהא $n\geq 2$ טבעי. מהן האקסיומות שבגללן $\mathbb{F}^{n\times n}$ אינו שדה? (מצא לפחות שתי אקסיומות)

ב. האם $\mathbb{F}^{1\times 1}$ שדה? נמק! (אין צורך בהוכחה מלאה)

העיקבה (trace) של מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדרת ע"י $\operatorname{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$ (סכום אברי האלכסון).

5.10 תרגיל. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח:

א. $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A^t)$.

ב. $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$.

ג. $\operatorname{tr}(\alpha A)=\alpha\operatorname{tr}(A)$ **לכל** $\alpha\in\mathbb{F}$.

ד. $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$.

$5.10\frac{1}{2}$ הוכח שאין מטריצות $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ עבורן $AB-BA=I$. האם הטענה נכונה מעל כל שדה?

עבור מטריצה $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, נגדיר את **המטריצה** A^* ע"י $A^*=\overline{A^t}$, כלומר $(A^*)_{ij}=\bar{a}_{ji}$.

5.11 תרגיל. א. תהא $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה, כך ש $\operatorname{tr}(AA^t)=0$. הוכח ש $A=O$. [בסעיף "מטריצות ריבועיות" הוכחנו ש AA^t ריבועית]

ב. תהא $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ מטריצה, כך ש $\operatorname{tr}(AA^*)=0$. הוכח ש $A=O$.

מגדירים **חזקות** של מטריצות באינדוקציה על $n=0,1,2,\ldots$:

$A^0:=I$, $A^1:=A$, $A^2=A\cdot A$, ... , $A^{n+1}:=A\cdot A^n$.

5.12 תרגיל. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות מתחלפות (בפרט זה נכון כאשר $A=B$).

א. הוכח שלכל k טבעי, המטריצות A^k ו B מתחלפות. [רמז: אינדוקציה על k]

ב. הוכח שלכל k,m טבעיים המטריצות A^k ו B^m מתחלפות. [רמז: הגדר $C=A^k$]

5.13 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שלכל k,m טבעיים מתקיים:

א. $A^kA^m=A^{k+m}$.

ב. $(A^k)^m=A^{km}$.

[רמז: אינדוקציה על k]

$5.13\frac{1}{2}$ תרגיל. דני, מעודד מהתרגיל הקודם, ניסה להוכיח שלכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ולכל k טבעי מתקיים $(AB)^k=A^kB^k$. למרות שדני מוכשר מאד, הוא לא הצליח להוכיח זאת. הפרך את ההשערה של דני.

5.14 תרגיל. א. תהא $A\in\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. חשב את A^{16} בעזרת 4 פעולות בלבד של כפל מטריצות.

[רמז: $16=2^4$. היעזר במחשבון]

ב. תהא $A\in\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. הוכח שלכל k טבעי מתקיים $A^k=2^{k-1}A$.

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת **מְחַלֶּקֶת-אפס** אם קיימת מטריצה $0\neq B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $AB=O$, או $BA=O$.

הסימון $*$ פירושו **ערך כלשהו** מהשדה המדובר. למשל, $\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix}$ פירושו: מטריצה כלשהי ב $\mathbb{F}^{2\times 2}$, שבה $a_{21}=0$.

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ היא **נילפוטנטית** מסדר k אם $A,A^2,\ldots,A^{k-1}$ כולן שונות ממטריצת האפס, אבל $A^k=O$.

5.15 תרגיל. א. הוכח שמטריצת האפס $O\in\mathbb{F}^{n\times n}$ היא נילפוטנטית מסדר 1.

ב. הוכח שכל מטריצה נילפוטנטית היא מחלקת אפס.

בהמשך הקורס נראה שאין מטריצה נילפוטנטית ב $\mathbb{F}^{n\times n}$ מסדר גדול מ n. התרגיל הבא מראה שיש מטריצה נילפוטנטית מסדר n.

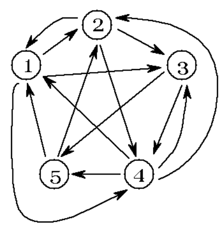
5.16 תרגיל. עבור $k=1,2,\dots,n-1$, נסמן ב A_k את המטריצה $n\times n$ כך שכל ערכי האלכסון ה k מעל האלכסון הראשי שלה הם 1, ושאר הערכים הם אפס, ועבור $n\le k$ נסמן $A_k=O$. הוכח שלכל k טבעי, $(A_1)^k=A_k$, והסק שהמטריצה A_1 היא נילפוטנטית מסדר n.

5.17 תרגיל[!]. **בינום ניוטון עבור מטריצות ויישום לחישוב חזקות:**

א. יהיו A,B מטריצות ריבועיות מתחלפות. הוכח שלכל n טבעי מתקיים: $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$.

ב. תהא $A=\begin{pmatrix} e^2 & 1 & 0\\ 0 & e^2 & 1\\ 0 & 0 & e^2\end{pmatrix}$. חשב את A^{123} [רמז: הצג את A בצורה $aI+B$, כאשר $B^3=O$, והיעזר ב(א), בתרגיל קודם, ובעובדה שמטריצה סקלרית מתחלפת עם כל מטריצה]

גרף מכוון הוא אוסף של קודקודים (נקודות) וחיצים חד-כיווניים המחברים בין קודקודים מסויימים. למשל:



הוא גרף מכוון עם קודקודים $\{1,2,3,4,5\}$. דוגמא נוספת: אם ניקח את כל המקומות בארץ בתור קודקודים, ואת הכבישים החד-סיטריים המחברים ביניהם בתור חיצים, נקבל גרף מכוון.

אפשר לייצג גרף מכוון בתור מטריצה, שבה יש 1 במקום ij אם יש חץ מקודקוד i לקודקוד j. למשל בדוגמא הראשונה שלנו, המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

5.18 תרגיל[!]. [מקור: תורת הגרפים] א. התבונן בגרף המצויר למעלה, ומצא כמה אפשרויות יש להגיע מקודקוד 4 לקודקוד 3, אם עוברים דרך 3 חיצים בדיוק.

ב. תהא A מטריצה המייצגת גרף. הוכח: לכל k טבעי, האיבר ה ij במטריצה A^k אומר כמה אפשרויות יש להגיע מקודקוד i לקודקוד j כשעוברים דרך k חיצים בדיוק (מותר לעבור דרך אותו חץ פעמיים).

[רמז: אינדוקציה על k]

ג. עבור A שבדוגמא לעיל, חשב את האיבר ה $(4,3)$ של A^3 ובדוק את תוצאתך ב(א).

נאמר שגרף מכוון הוא **קשיר** אם לכל שני קודקודים בגרף יש סדרה של קשתות כך שאפשר לעבור מאחד מהם לשני, אם הולכים בכיוון החצים.

5.19 תרגיל[!]. [מקור: התורה הארגודית] מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ שכל רכיביה הם 0 או 1 נקראת **בלתי ניתנת לפישוט** אם לכל i,j יש חזקה m כך שהאיבר ה (i,j) של המטריצה A^m הוא חיובי. הוכח: A בלתי ניתנת לפישוט $\Leftrightarrow$ הגרף ש A מייצגת הוא קשיר.

בעזרת הגדרת החזקה, אפשר **להציב מטריצות ריבועיות בפולינומים**. נסמן

$$\mathbb{F}[x]:=\{a_0+a_1x+\ ...\ +a_nx^n\ :\ n\in\mathbb{N};\ a_0,\ ...\ ,a_n\in\mathbb{F}\}$$

יהא $f(x)=a_0+a_1x+\ ...\ +a_nx^n\in\mathbb{F}[x]$, ותהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נגדיר:

$$f(A):=a_0I+a_1A+\ ...\ +a_nA^n\in\mathbb{F}^{n\times n}$$

5.20 תרגיל. הוכח שלכל פולינום $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ **ולכל** $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, המטריצות A ו $f(A)$ מתחלפות.

יהא $f(x)\in\mathbb{F}[x]$. אם $f(A)=O$, נאמר שהמטריצה A **מאפסת את הפולינום** $f(x)$.

5.21 תרגיל. הוכח שאם $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימות $AB=A$, וכן $BA=B$, אזי A וכן B מאפסות את הפולינום $f(x)=x^2-x$ (במלים אחרות, $A^2=A$ ו $B^2=B$).

אגב, מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ המקיימת $A^2=A$ נקראת **אִידֶמְפּוֹטֶנְטִית**, או: **הַטָּלָה**.

5.22 תרגיל. נגדיר העתקה $\varphi:\mathbb{C}\to\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\ :\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ ע"י $\varphi(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}$. הוכח את התכונות הבאות (התכונות המופיעות בסוגריים אינן חובה):

[א. φ חד-חד ערכית]

[ב. φ על]

ג. לכל $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ מתקיים: $\varphi(z_1z_2)=\varphi(z_1)\varphi(z_2)$ וכן $\varphi(z_1+z_2)=\varphi(z_1)+\varphi(z_2)$.

ד. $\varphi(0)=O$, ו $\varphi(1)=I$.

משמעות התרגיל האחרון היא, שניתן "לשכן" את $\mathbb{C}$ בתוך $\mathbb{R}^{2\times 2}$, כלומר המטריצות $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right)$ מתנהגות בדיוק כמו המספרים המרוכבים $a+bi$.

5.23 תרגיל. מצא מטריצה $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, המאפסת את הפולינום $f(x)=x^2+x+1$. [רמז: התרגיל הקודם]

6 מטריצות אלמנטריות והפיכת מטריצות

מטריצה A היא **הפיכה** אם יש מטריצה B כך ש $AB=BA=I$. במקרה כזה, אומרים ש B היא **מטריצה הופכית** ל A, וכותבים $B=A^{-1}$.

6.1 תרגיל. תהי A מטריצה הפיכה.

א. הוכח ש A ריבועית.

ב. הוכח שיש רק מטריצה אחת B שהיא הופכית ל A.

ג. הוכח שגם המטריצה A^{-1} הפיכה, ומתקיים $(A^{-1})^{-1}=A$.

$6.1\frac{1}{2}$ תרגיל. הוכח: אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה, אז גם A^t הפיכה, ומתקיים $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.
הסק: אם A סימטרית והפיכה, אז גם A^{-1} סימטרית.

6.2 תרגיל. יהיו A,B מטריצות הפיכות מאותו סדר. הוכח שגם AB הפיכה, ומתקיים $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

6.3 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה מחלקת-אפס. הוכח ש A אינה הפיכה. הסק שכל מטריצה נילפוטנטית היא לא הפיכה.

$6.3\frac{1}{2}$ תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אלכסונית. מתי A הפיכה? מהי A^{-1} במקרה זה?

בסידרת התרגילים הבאה נלמד מחלקה חשובה של מטריצות הפיכות.

שתי מטריצות מאותו סדר A,B הן **שקולות שורה** אם אפשר לקבל מ A את B ע"י סידרה סופית של פעולות שורה אלמנטריות. כיון שפעולות שורה אלמנטריות אינן משנות את הפתרונות של מערכת משוואות, למערכות משוואות עם מטריצות שקולות שורה יש אותם פתרונות בדיוק.

6.4 תרגיל. נכתוב $A\sim_R B$ אם A,B (הן מאותו סדר וכן) שקולות שורה. הוכח ש $\sim_R$ הוא יחס שקילות, כלומר הוא מקיים את התכונות הבאות:

א. **רפלקסיביות**: לכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $A\sim_R A$.

ב. **סימטריות**: לכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אם $A\sim_R B$ אז $B\sim_R A$.

ג. **טרנזיטיביות**: לכל $A,B,C\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אם $A\sim_R B$ וכן $B\sim_R C$, אזי $A\sim_R C$.

6.5 תרגיל. א. הוכח שהמטריצות הבאות שקולות שורה מעל $\mathbb{R}$:

$$A=\begin{pmatrix}5&-4&3\\0&7&4\\2&-3&-1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-9&-4&-9\\-2&3&1\\15&9&21\end{pmatrix}.$$

ב. פתור את המערכות $Ax=0$ ו $Bx=0$ ב"חצי עבודה".

6.6 תרגיל. עבור $A=\begin{pmatrix}1&0.5&3.4\\3&2&1\\1&6.8&7\\0&7.8&8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-3&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, חשב את BA. איזה פעולה מוכרת לך מתבצעת על A באמצעות כפל זה?

פעולה ρ על מטריצות נקראת **פעולת שורה אלמנטרית** אם היא מבצעת על המטריצה את אחת הפעולות הבאות:

- $R_i \leftarrow R_i+\alpha R_j$,
- $R_i \leftarrow \alpha R_i$ כאשר $\alpha\neq 0$, או
- $R_i \leftrightarrow R_j$.

במקרה כזה, המטריצה $\rho(I)$ נקראת **מטריצת שורה אלמנטרית**, או פשוט **מטריצה אלמנטרית**.

בדומה, פעולה ρ על מטריצות נקראת **פעולת עמודה אלמנטרית** אם היא מבצעת על המטריצה את אחת הפעולות הבאות:

- $C_i \leftarrow C_i+\alpha C_j$,
- $C_i \leftarrow \alpha C_i$ כאשר $\alpha\neq 0$, או
- $C_i \leftrightarrow C_j$.

במקרה זה המטריצה $\rho(I)$ נקראת **מטריצת עמודה אלמנטרית**.

$6.6\frac{1}{2}$ תרגיל. הוכח שכל מטריצת עמודה אלמנטרית היא גם מטריצת שורה אלמנטרית.

6.7 תרגיל. תהא ρ פעולת שורה אלמנטרית. הוכח:

א. לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $\rho(A)=\rho(I)A$ (כאשר I היא מטריצת היחידה מסדר $m\times m$). הסק שלכל זוג מטריצות A,B כך שהכפל AB מוגדר, מתקיים $\rho(AB)=\rho(A)B$.

ב. המטריצה $\rho(I)$ הפיכה, ומתקיים $\rho(I)^{-1}=\rho^{-1}(I)$, כאשר ρ^{-1} היא הפעולה ההפוכה ל ρ.

$6.7\frac{1}{2}$ תרגיל. תהא ρ פעולת עמודה אלמנטרית. הוכח:

א. לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $\rho(A)=A\rho(I)$ (כאשר I היא מטריצת היחידה מסדר $n\times n$). הסק שלכל זוג מטריצות A,B כך שהכפל AB מוגדר, מתקיים $\rho(AB)=A\rho(B)$.

ב. המטריצה $\rho(I)$ הפיכה, ומתקיים $\rho(I)^{-1}=\rho^{-1}(I)$, כאשר ρ^{-1} היא הפעולה ההפוכה ל ρ.

[רמז: תרגיל קודם]

בתהליך הדירוג של מטריצה אנו מביאים אותה **לצורה מדורגת**. בצורה מדוייקת, מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ היא **מדורגת** אם קיימים אינדקסים $1\leq j_1<\dots<j_r\leq n$ כך שמתקיים:

א. האיברים $a_{1j_1},\dots,a_{rj_r}$ שונים מאפס,

ב. האיברים שלפניהם כולם אפס, כלומר לכל $i=1,\dots,r$ ולכל $j<j_i$ מתקיים $a_{ij}=0$;

ג. השורות $r+1,\dots,m$ מאופסות.

אפשר להמשיך את תהליך הדירוג עוד קצת, על ידי חילוק שורה j_i ב a_{ij_i} (להפוך אותו ל 1) ואיפוס הרכיבים שמעל a_{ij_i}. המטריצה החדשה נקראת **מדורגת קנונית**. בצורה מדוייקת, המטריצה המדורגת

קנונית מקיימת את התכונות הנ"ל, ובנוסף:

ד. $a_{1j_1} = \ldots = a_{rj_r} = 1$, וכן

ה. לכל i, האיברים שמעל a_{ij_i} הם אפס, כלומר לכל $k<i$, $a_{kj_i}=0$.

אפשר איפוא להביא כל מטריצה, בעזרת פעולות שורה אלמנטריות, לצורה מדורגת קנונית.

6.8 תרגיל. תהא A מטריצה כלשהי. הראה שקיימות מטריצות שורה אלמנטריות $E_1, \ldots, E_k$ כך שהמטריצה $E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ היא מדורגת קנונית.

6.9 תרגיל. הוכח:

א. אם A שקולת שורה ל B, אז יש מטריצה הפיכה P כך ש $B=PA$.

ב. אם ניתן להגיע מ A ל B ע"י פעולות עמודה אלמנטריות, אז יש מטריצה הפיכה P כך ש $B=AP$.

6.10 תרגיל. הוכח שמטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ היא הפיכה $\Leftrightarrow$ יש מטריצות $B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $AB=CA=I$.
[רמז: חשב את הביטוי CAB בשתי דרכים שונות]

נוכיח שאם $AB=I$ אז A, B הפיכות.

6.11 תרגיל. בתרגיל זה, כל המטריצות שייכות ל $\mathbb{F}^{n\times n}$. יהיו A, B מטריצות כך ש $AB=I$. הוכח את הטענות הבאות:

א. אין ב A שורת אפסים. [רמז: כפל שורה-שורה]

ב. A אינה שקולת שורה למטריצה עם שורת אפסים. [רמז: אחרת, $PAB=P$ הפיכה, אבל יש בה שורת אפסים]

ג. בצורה המדורגת קנונית של A אין שורת אפסים, ולכן היא I, ולכן ל A יש מטריצה C כך ש $CA=I$.

ד. A הפיכה.

ה. B הפיכה.

6.12 תרגיל. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: AB הפיכה $\Leftrightarrow$ A הפיכה וגם B הפיכה. [רמז: אם AB הפיכה אז יש C כך ש $A(BC)=(AB)C=I$, לכן (מדוע?) A הפיכה. בדומה עבור B.]

$6.12\frac{1}{2}$ תרגיל. הוכח:

א. $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה $\Leftrightarrow$ ניתן להציג את P כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

ב. אם יש מטריצה הפיכה P כך ש $B=PA$, אז A שקולת שורה ל B.

ג. נסח והוכח טענה מקבילה ל(ב) עבור עמודות. [רמז: שיחלוף]

6.13 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. הבע את A ואת A^{-1} כמכפלת 3 מטריצות אלמנטריות.
[רמז: מספיק להביא אחת מהמטריצות]

6.14 תרגיל. יהיו $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\2&4&3\end{pmatrix}$. מצא שתי מטריצות הפיכות P,Q כך ש $B=PAQ$.

[רמז: השתמש בפעולות שורה ועמודה אלמנטריות כדי להביא את A ואת B לצורה פשוטה ככל האפשר]

6.15 תרגיל. יהיו $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\-2&7&2\\3&-2&4\end{pmatrix}$ מצא, בעזרת פעולות אלמנטריות, מטריצה X המקיימת $AX=B$. [רמז: הפעל פעולות אלמנטריות על $(A|B)$ עד לקבלת $(I|X)$. מדוע זה עובד?]

6.16 תרגיל. א. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $AB\neq O$ מטריצה סקלרית. הוכח ש A,B הפיכות. (מהי ההופכית שלהן?)

ב. הוכח שכל מטריצה המתחלפת עם כל המטריצות **ההפיכות** מסדר $n\times n$ היא סקלרית. [רמז: מטריצות של פעולות אלמנטריות הן הפיכות]

6.17 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: A הפיכה $\Leftrightarrow$ קיים k כך ש A^k הפיכה. [רמז: תהי B ההופכית של A^k. הראה ש $C=A^{k-1}B$ הופכת את A]

6.18 תרגיל. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש A הפיכה. הוכח שהמערכות $Bx=0$ ו $(AB)x=0$ שקולות (כלומר יש להן אותם פתרונות).

6.19 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{2\times 2}$. נסמן $\Delta=ad-bc$. הוכח:

א. אם $\Delta\neq 0$, אז A הפיכה ו $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$. [הוכח ע"י בדיקה ישירה ש $A^{-1}A=I$]

ב. אם $\Delta=0$ אז A אינה הפיכה. [רמז: הראה ש A מחלקת אפס]

6.20 תרגיל!. א. בהתאם לסימונים של התרגיל הקודם, הוכח ש A מאפסת את הפולינום $f(x)=x^2-\mathrm{tr}(A)\cdot x+\Delta$. [בדוק ע"י הצבה]

ב. השתמש ב(א) להוכיח את התרגיל הקודם בדרך אחרת.

ג. יהיו $A,B,C\in\mathbb{F}^{2\times 2}$. הוכח: $(AB-BA)^2C=C(AB-BA)^2$. [רמז: תהי $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$ עם עיקבה אפס. הוכח ש A^2 היא סקלרית]

6.21 תרגיל!. יהיו $B=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-1&3\\1&2\end{pmatrix}$. מצא מטריצות X,Y כך ש: $\begin{cases}2XA+3YB&=&B\\X+2Y&=&A\end{cases}$. [רמז: יש דרך טכנית ומכוערת, ויש דרך אלגנטית לפתרון הבעיה]

6.22 תרגיל!. יהיו $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$, $B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, I_n מטריצת היחידה ב $\mathbb{F}^{n\times n}$ ו I_m מטריצת היחידה ב $\mathbb{F}^{m\times m}$.
הוכח: I_n-AB הפיכה $\Leftrightarrow$ I_m-BA הפיכה. [רמז: חשוב על המטריצה $I+A(I-BA)^{-1}B$]

6.23 תרגיל. **סכום סדרה הנדסית של מטריצות**. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, כך שהמטריצה $A-I$ הפיכה. הוכח שלכל k טבעי, $I+A+A^2+\dots+A^k=(A^{k+1}-I)(A-I)^{-1}$.

6.24 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, המקיימת $A^2=-I$. הוכח או הפרך:

א. $A^3=A^{-1}$.

ב. $I-A=A^{-1}$.

ג. A לא בהכרח הפיכה.

6.25 תרגיל. תהא A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{C}$, כך שהמטריצה $A+A^2$ הפיכה. קבע איזה מהמטריצות $A,A+I$ היא הפיכה.

6.27 תרגיל. **חישוב A^{-1} בעזרת פתרון n^2 משוואות**: הפוך את המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$ בעזרת פתרון של 4 משוואות ב 4 נעלמים. [הדרכה: נסמן $A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. דרוש ש $A^{-1}A=I$. אזה מקבלים 4 משוואות עם הנעלמים a,b,c,d – ופותרים]

חישוב A^{-1} (עבור A מסדר $n\times n$) בעזרת פתרון n^2 משוואות ב n^2 נעלמים יקר מאד: פתרון של m משוואות ב m נעלמים דורש עבודה מסדר גודל של m^3 פעולות. כאן זה יוצא n^6 פעולות. למשל, עבור $n=5$ זה כ 15,000 פעולות! למזלנו, אפשר גם למצוא את A^{-1} בכ n^3 פעולות (125 במקרה $n=5$) בלבד: **חישוב A^{-1} ע"י דירוג** (ראה בתרגיל הבא).

6.28 תרגיל[!]. **פתרון מערכות משוואות עם אותה מטריצת מקדמים.**

א. תהא $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, ויהיו $b_1,\dots,b_k\in\mathbb{F}^m$. תהא $B=(b_1,\dots,b_k)\in\mathbb{F}^{m\times k}$ המטריצה שעמודותיה הן $b_1,\dots,b_k$. הראה שאפשר לפתור את כל המערכות $Ax=b_1,\dots,Ax=b_k$ בבת אחת, על ידי דירוג המטריצה $(A|B)$.

ב. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הראה שהפיכת A שקולה לפתרון המערכות $Ax=e_1,\dots,Ax=e_n$. הסק שהפיכת A שקולה לדירוג המטריצה $(A|I)$.

תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. לאור התרגיל הקודם, אנחנו מכירים שתי שיטות יעילות לפתרון של הרבה מערכות $Ax=b_i$ $(i=1,\dots,k)$ עם אותה מטריצת מקדמים A. האחת היא לדרג את המטריצה הארוכה $(A|b_1,b_2,\dots,b_k)$ ("שיטת הדרוג"), והשניה היא להפוך את A ע"י דירוג המטריצה $(A|I)$, ואחר כך לחשב את הפתרונות $x_i=A^{-1}b_i$ לכל $i=1,\dots,k$ ("שיטת היפוך").

6.29 תרגיל[!]. נסה לתת הערכה מקורבת, מתי עדיפה שיטת הדרוג ומתי עדיפה שיטת הליכסון לפתרון מערכות של משוואות עם אותה מטריצת מקדמים.

6.30 תרגיל. חשב את המטריצה ההופכית עבור כל אחת מהמטריצות הבאות:

א. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ב. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

ד. **המטריצה הנלוית:** $\text{companion}(a_0, \dots, a_{n-1}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & & & . & . \\ . & & & & . \\ . & & & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & & a_{n-1} \end{pmatrix}$ (אתי היכו הפיכה?).

6.31 תרגיל. א. חשב את A^{-1} (מעל $\mathbb{Z}_5$) ע"י דירוג: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ב. היעזר בסעיף (א) לפתור בקלות את כל המערכות הבאות: $Ax=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $Ax=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $Ax=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.32 תרגיל. א. נתבונן במטריצה $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & & \dots & a+n \\ a & a & a+1 & \dots & a+(n-1) \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ . & & & & a+1 \\ a & . & . & . & a \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$ מעל $\mathbb{R}$.

למשל, $B=\begin{pmatrix} \pi & \pi+1 & \pi+2 \\ \pi & \pi & \pi+1 \\ \pi & \pi & \pi \end{pmatrix}$ היא דוג' למטריצה כזאת, וכן $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

חשב את A^{-1} עבור המקרים שבהם A הפיכה (לאילו ערכים של a המטריצה הפיכה?).

ב. פתור את מערכות המשוואות $B\vec{x}=\vec{b}$ לכל אחת מה-B-ים הנ"ל, כאשר במקרה הראשון $\vec{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}$,

ובמקרה השני $\vec{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, **מבלי להזיע!**

6.33 תרגיל. א. תהא A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2=A$. הוכח: $(I+A)^{-1}=I-\frac{1}{2}A$.

ב. תהא $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. מצא את $(I+A)^{-1}$ בשני דרכים: ישירות, ובאמצעות (א).

6.34 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. מצא בעזרת A^{-1} את הפתרון הכללי של המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-x_4+x_5 &= 1 \\ -x_2+x_3+2x_4-x_5 &= 2 \\ 2x_1+3x_2+8x_3+x_4+2x_5 &= 3 \end{cases}.$$

חזקות שליליות של מטריצה. נגדיר באינדוקציה, לכל n טבעי, $A^{-(n+1)}:=A^{-1}A^{-n}$.

6.35 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה.

א. הוכח שלכל k טבעי, $(A^{-1})^k=A^{-k}$.

ב. הוכח שלכל k טבעי, $(A^k)^{-1}=A^{-k}$.

ג. הסק שלכל a,b **שלמים** (לאו דוקא חיוביים) מתקיים $(A^a)^b=A^{ab}=(A^b)^a$.

ד. $A^a\cdot A^b=A^{a+b}=A^b\cdot A^a$.

המטריצות $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ **דומות** אם יש מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $A=P^{-1}BP$. במקרה זה, נכתוב $A\sim B$.

6.36 תרגיל. הוכח שהיחס $\sim$ הוא **יחס שקילות** על $\mathbb{F}^{n\times n}$, כלומר הוא מקיים את שלש התכונות הבאות:

א. **רפלקסיביות**: לכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $A\sim A$.

ב. **סימטריות**: לכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אם $A\sim B$ אז $B\sim A$.

ג. **טרנזיטיביות**: לכל $A,B,C\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אם $A\sim B$ וכן $B\sim C$, אזי $A\sim C$.

6.37 תרגיל. תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $A\sim B$. הוכח:

א. לכל k טבעי, $A^k\sim B^k$.

ב. יהא $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום. הוכח: $f(A)\sim f(B)$.

ג. A הפיכה $\Leftrightarrow$ B הפיכה.

ד. אם A הפיכה, אז $A^{-1}\sim B^{-1}$.

ה. אם A הפיכה, אז לכל k טבעי, $A^{-k}\sim B^{-k}$.

ו. אם A הפיכה, אז לכל k שלם, $A^k\sim B^k$.

6.38 תרגיל. א. הוכח שאם $A\sim O$ אז $A=O$.

ב. הוכח שאם $A\sim\alpha I$ אז $A=\alpha I$.

סכום ישר של מטריצות. עבור מטריצות $A\in\mathbb{F}^{n\times n},\ B\in\mathbb{F}^{m\times m}$ נגדיר מטריצה $A\oplus B\in\mathbb{F}^{(n+m)\times(n+m)}$ לפי

$$A\oplus B:=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

למשל, $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

6.39 תרגיל. א. הוכח שלכל רביעיית מטריצות $A,C\in\mathbb{F}^{n\times n},\ B,D\in\mathbb{F}^{m\times m}$ מתקיים:

$(A\oplus B)(C\oplus D)=(AC)\oplus(BD)$.

ב. הסק מכך, שאם $A,\ B$ הפיכות, אזי $(A\oplus B)^{-1}=A^{-1}\oplus B^{-1}$.

ג. הסבר מדוע המכפלה $\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&7&7&7\\0&0&8&8&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&0&0\\4&5&6&0&0\\7&8&10&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&2&3\end{pmatrix}$ אינה מתנהגת כמו ב–א.

ד. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ו $C,D\in\mathbb{F}^{m\times m}$ כך ש $A\sim B$ ו $C\sim D$. הוכח: $A\oplus C\sim B\oplus D$.

6.40 תרגיל. כפל של מטריצות בלוקים. יהיו $A\in\mathbb{F}^{a\times k},B\in\mathbb{F}^{a\times m},C\in\mathbb{F}^{b\times k},D\in\mathbb{F}^{b\times m}$, ויהיו $X\in\mathbb{F}^{k\times c},Y\in\mathbb{F}^{k\times d},Z\in\mathbb{F}^{m\times c},W\in\mathbb{F}^{m\times d}$. הוכח:

$$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X&Y\\Z&W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AX+BZ&AY+BW\\CX+DZ&CY+DW\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{(a+b)\times(c+d)}$$

6.41 תרגיל!. תהא A מטריצה ריבועית.

א. נניח שקיים מספר טבעי n כך ש $A^n=I$. הוכח ש A הפיכה.

ב. תהא A מטריצה הפיכה מעל שדה סופי (למשל $\mathbb{Z}_p$) הוכח שקיים n טבעי כך ש $A^n=I$.

ג. מצא מטריצה הפיכה A כך שלכל מספר טבעי n, $A^n\neq I$ (לפי (ב) המטריצה צריכה להיות מעל שדה אינסופי).

6.42 תרגיל!. יהא $\mathbb{F}$ שדה כך ש $\mathrm{char}(\mathbb{F})\neq 2$, ויהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות המקיימות $A^2+AB+2I=O$. הוכח ש A,B מתחלפות (דהיינו $AB=BA$).

6.44 תרגיל!. א. נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}-6&-3&-2\\1&0&0\\6&4&2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. הוכח (ע"י הצבה) שהיא מאפסת את הפולינום x^3+4x^2+3x+2.

ב. **עובדה** (בשלב זה בלי הוכחה): יהא נתון פולינום $f(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}-\dots-a_1x-a_0$ מעל $\mathbb{R}$. אזי המטריצה הנלוית

$$\mathrm{companion}(a_0,\dots,a_{n-1}):=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&0&0\\.&&&.&.\\.&&&&.\\.&&&&0\\0&\dots&&0&1\\a_0&a_1&\dots&&a_{n-1}\end{pmatrix}$$

מאפסת את $f(x)$. בדוק ש $A=P^{-1}\cdot\mathrm{companion}(2,3,4)\cdot P$, כאשר $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. השתמש בכך כדי להוכיח את (א) בצורה נוספת.

6.45 תרגיל!. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ויהא $f(x)\in\mathbb{F}[x]$. הוכח:

[א. אם $f(A)=\alpha I$ $(\alpha\in\mathbb{F})$, אזי A מאפסת את הפולינום $f(x)-\alpha$]

ב. אם A מאפסת את $f(x)$ וכן $f(0)\neq 0$, אזי A הפיכה.

ג. אם A הפיכה ומאפסת את $f(x)$ $(f(x)\neq 0)$, וכן $f(0)=0$, אזי A מאפסת פולינום ממעלה נמוכה

יותר $g(x)\in\mathbb{F}[x]$, המקיים $g(0)\neq 0$.

6.46 תרגיל[!]. נתון $f(A)=0$, כאשר $f(x)=a_nx^n+\dots+a_0$. הוכח ש $g(A^{-1})=0$, כאשר $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$.

פרק ד: מרחבים וקטוריים מעל שדה

1 מרחבים וקטוריים

הדוגמא החשובה ביותר של מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ היא $\mathbb{F}^n:=\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n):\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}\}$, עם חיבור וכפל בסקלר לפי רכיבים. המושג "מרחב וקטורי" מכליל את התכונות של דוגמא זאת.

מרחב וקטורי הוא מבנה המורכב משדה $\mathbb{F}$ עם פעולות חיבור וכפל של שדה $+_{\mathbb{F}},\cdot_{\mathbb{F}}$ וקבוצה V שעליה מוגדרת פעולת חיבור $+_V$, כך של V יש אותן תכונות של שדה שאינן מערבות כפל. בנוסף, יש פעולה $\cdot_{\mathbb{F}V}$ של **כפל סקלר בוקטור**, שמקשרת בין את המבנים. בצורה מפורשת: יהא $\langle\mathbb{F},+_{\mathbb{F}},\cdot_{\mathbb{F}},0_{\mathbb{F}},1_{\mathbb{F}}\rangle$ שדה. קבוצה V עם פעולה $+_V$ (**חיבור וקטורי**) המוגדרת על V ופעולה $\cdot_{\mathbb{F}V}:\mathbb{F}\times V\to V$ (**כפל סקלרי**) נקראת **מרחב וקטורי מעל השדה** $\mathbb{F}$ אם מתקיימות התכונות הבאות:

1 **מוגדרות החיבור.** לכל $u,v\in V$ מתקיים $u+_Vv\in V$,

2 **קיבוץ.** לכל $u,v,w\in V$ מתקיים $(u+_Vv)+_Vw=u+_V(v+_Vw)$,

3 **חילוף.** לכל $u,v\in V$ מתקיים $u+_Vv=v+_Vu$,

4 **איבר נייטרלי.** קיים איבר $0_V\in V$ כך שלכל $v\in V$ מתקיים $v+0_V=v$,

5 **איבר נגדי.** לכל $v\in V$ קיים $-v\in V$ כך ש $v+_V(-v)=0_V$.

6 **תכונות הכפל הסקלרי:**

א. **מוגדרות.** לכל $v\in V$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}v\in V$,

ב. **קיבוץ.** לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $v\in V$ מתקיים $(\alpha\cdot_{\mathbb{F}}\beta)\cdot_{\mathbb{F}V}v=\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}(\beta\cdot_{\mathbb{F}V}v)$,

ג. **כפל יחידה.** לכל $v\in V$ מתקיים $1\cdot_{\mathbb{F}V}v=v$.

ד. **פילוג.**

(i) לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ ולכל $u,v\in V$ מתקיים $\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}(u+v)=\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}u+\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}v$,

(ii) לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $v\in V$ מתקיים $(\alpha+\beta)\cdot_{\mathbb{F}V}v=\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}v+\beta\cdot_{\mathbb{F}V}v$.

אברי הקבוצה V נקראים **וקטורים**, ואברי השדה $\mathbb{F}$ נקראים **סְקָלָרִים**.

קיצורים. לשם נוחיות, משמיטים את האינדקסים $\mathbb{F},V,\mathbb{F}V$ המופיעים בפעולות הכפל והחיבור, כאשר הפעולות הן לפי ההקשר. לעתים גם משמיטים את הסימן $\cdot$ עצמו, למשל: $(\alpha\beta)v$ פירושו $(\alpha\cdot_{\mathbb{F}}\beta)\cdot_{\mathbb{F}V}v$, כי הכפל השמאלי הוא בין אברי $\mathbb{F}$, והשני הוא כפל סקלר בוקטור. מקובל גם לכתוב $\vec{0}$ במקום 0_V, ואם ברור שמדובר בוקטור (ולא בסקלר 0), משמיטים גם את החץ וכותבים פשוט 0, למשל: ברור שבביטוי $u+v=0$ כאשר $u,v\in V$, הכוונה היא $u+_Vv=\vec{0}$.

1.1 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$. הוכח את התכונות הבאות:

א. לכל $\alpha\in\mathbb{F}$, $\alpha\vec{0}=\vec{0}$.

ב. לכל $v\in V$, $0v=\vec{0}$.

ג. לכל $v\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$, $(-\alpha)v=-(\alpha v)$.

ד. אם $\alpha v=\vec{0}$, אז $\alpha=0$ או $v=\vec{0}$.

תרגיל $1.1\frac{1}{2}$. הוכח ש $\mathbb{F}^n$ וכן $\mathbb{F}^{n\times n}$ הם מרחבים וקטורים.

תרגיל 1.2. יהא $\mathbb{R}^2$ עם פעולת חיבור וקטורים הרגילה. בכל אחד מהסעיפים הבאים מוצעת הגדרה לכפל בסקלר. בדוק האם ההצעה אכן נותנת מרחב וקטורי.

א. $\alpha(x,y):=(\alpha x,y)$.

ב. $\alpha(x,y):=(\alpha^2 x,\alpha^2 y)$.

תרגיל 1.4. יהא V מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$, ויהא $\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$ תת-שדה. הוכח:

א. $\mathbb{F}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{H}$, כאשר $\cdot_{\mathbb{H}\mathbb{F}}:=\cdot_{\mathbb{F}}$.

ב. V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{H}$, כאשר $\cdot_{\mathbb{H}V}:=\cdot_{\mathbb{F}V}$.

אם U,V מרחבים וקטורים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, אפשר להגדיר את **מרחב המכפלה** $U\times V$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, בצורה הבאה:

- $U\times V:=\{(u,v)\ :\ u\in U, v\in V\}$,
- סכום וקטורים לפי רכיבים $(u_1,v_1)+(u_2,v_2):=(u_1+_U u_2, v_1+_V v_2)$,
- כפל סקלארי - גם לפי רכיבים $\alpha(u,v):=(\alpha u,\alpha v)$.

תרגיל 1.5. הוכח שמרחב המכפלה הוא אכן מרחב וקטורי.

2 תת-מרחבים וקטוריים

יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. נאמר ש W **תת-מרחב** של V אם:

1. $\emptyset\neq W\subseteq V$,
2. הקבוצה W היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולת החיבור $+_V$ של V, והכפל הסקלרי $\cdot_{\mathbb{F}V}$.

תרגיל 2.1. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהא W תת-מרחב של V. הוכח: $0_W=0_V$.

תרגיל 2.2. עיין בתרגיל 1.4 לעיל. האם ניתן לומר ש:

א. $\mathbb{F}$ תת-מרחב של V?

ב. V כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{H}$ הוא תת-מרחב של V (כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$)?

תרגיל 2.3. יהא $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]:=\{a+b\sqrt{3}\ :\ a,b\in\mathbb{Q}\}$. האם $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ תת-מרחב של של $\mathbb{R}$ כמרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$?

אוסף המטריצות ההפיכות ב $\mathbb{F}^{n\times n}$ מסומן $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, או $(\mathbb{F}^{n\times n})^*$.

תרגיל 2.4. האם $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$?

קריטריון מקוצר. כדי לבדוק ש W תת־מרחב של V, מספיק לבדוק את התכונות הבאות:

1. $0_V\in W\subseteq V$,
2. לכל $w\in W$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}w\in W$,
3. לכל $u,w\in W$ מתקיים $u+_V w\in W$.

2.5 תרגיל. הוכח ש W הוא תת־מרחב של V אם ורק אם הוא מקיים את הקריטריון המקוצר.

עבור מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, המרחב $\{v : Av=0\}$ נקרא **מרחב הפתרונות** של המערכת $Ax=0$.

$2.5\frac{1}{2}$ תרגיל. א. הוכח שאוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית $Ax=0$ הוא מרחב וקטורי מעל השדה המתאים $\mathbb{F}$.

ב. הוכח שאוסף הפתרונות של מערכת **לא** הומוגנית $Ax=b$ **אינו** מ"ו מעל השדה המתאים $\mathbb{F}$.

2.6 תרגיל (תת־מרחבים טריויאליים). הוכח שלכל מרחב וקטורי V, הקבוצות $W=\{0_V\}$ וכן $W=V$ הן תת־מרחבים של V.

2.7 תרגיל. **הקריטריון הקצר ביותר בעולם.** יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ונניח ש $W\subseteq V$ מקיימת: $\emptyset\neq W$ ולכל $u,w\in W$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$, $u+\alpha w\in W$. הוכח ש W תת־מרחב של V.

2.8 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי, ויהיו W,U תת־מרחבים של V כך ש $W\subseteq U$. הוכח ש W תת־מרחב של U.

2.9 תרגיל. יהא $V=\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שכל אחת מהקבוצות הבאות מהווה תת־מרחב של V (ביחס לפעולות של V):

א. המטריצות הסימטריות.

[ב. המטריצות האנטי־סימטריות]

ג. המטריצות האלכסוניות.

ד. המטריצות המשולשיות עליונות.

ה. המטריצות A עם $\operatorname{tr}(A)=0$.

ו. המטריצות הסקלריות.

ז. מטריצות מהצורה $O\oplus A=\begin{pmatrix} O & O \\ O & A\end{pmatrix}$. ($A\in\mathbb{F}^{k\times k}$ כאשר $k<n$).

2.10 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ונגדיר $V_A:=\{B\in\mathbb{F}^{n\times n} : BA=AB\}$.

א. הוכח ש V_A תת־מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

ב. הוכח ש V_A סגור גם לכפל מטריצות.

2.11 תרגיל. א. יהיו U,V מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. הוכח ש $U\times\{0_V\}$ וכן $\{0_U\}\times V$ תת-מרחבים של $U\times V$.

ב. הוכח שלכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $V=\{(\alpha x,\beta x)\,:\,x\in\mathbb{F}\}$ תת-מרחב של $\mathbb{F}\times\mathbb{F}$.

3 חיתוך ואיחוד של תת-מרחבים

3.1 תרגיל. יהיו W,U תת-מרחבים של מרחב וקטורי V. הוכח:

א. $U\cap W$ תת-מרחב של V.

ב. לכל תת-מרחב Y המוכל ב U וגם ב W מתקיים $Y\subseteq U\cap W$.

(במילים אחרות, $U\cap W$ הוא תת-המרחב הגדול ביותר המוכל ב U וגם ב W)

3.2 תרגיל. יהיו W,U תת-מרחבים של מרחב וקטורי V. הוכח: $U\cup W$ אינו תת-מרחב של V, חוץ מהמקרה שאחד מהם מוכל בשני. [רמז: קח $u\in U\setminus W$ ו $w\in W\setminus U$, והראה ש $u+w\notin U\cup W$]

3.3 תרגיל. יהיו $U,W\subseteq V$ תת-מרחבים. הוכח: כל תת-מרחב של V המוכל ב $U\cup W$ מוכל כולו ב U ו/או ב W.

3.4 תרגיל. יהי $V=\mathbb{F}^{n\times n}$. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונים שני תת-מרחבים U,W של V. עבור כל אחד מהם, בצע את סדרת הבדיקות הבאה:

- תאר את $U\cap W$,
- הוכח ש $U\subseteq W$ או $W\subseteq U$; **ואם לא** – הראה ש $U\cup W$ **אינו מ"ו** ע"י שתיקח $u,w\in U\cup W$ כך ש $u\notin W$, $w\notin U$, ותראה (ישירות) ש $u+w\notin U\cup W$.

א. U – המטריצות הסימטריות; W – המטריצות האלכסוניות.

ב. U – המטריצות הסימטריות; W – המטריצות המשולשיות עליונות.

ג. U – המטריצות האנטי-סימטריות; W – המטריצות A עם $\mathrm{tr}(A)=0$.

ד. U – המטריצות הסקלריות (כלומר מהצורה αI עבור $\alpha\in F$); W – מטריצות מהצורה $O\oplus A=\begin{pmatrix} O & O \\ O & A\end{pmatrix}$.
(A מטריצה $k\times k$ כאשר $k<n$).

4 סכומים של תת-מרחבים

יהא V מרחב וקטורי, ויהיו U,W תת-מרחבים של V. **הסכום** $U+W$ מוגדר ע"י:

$$U+W=\{u+w\,:\,u\in U,\ w\in W\}.$$

4.1 תרגיל. יהיו U,W,V כנ"ל. הוכח:

א. $U+W$ תת-מרחב של V המכיל את U וגם את W.

ב. לכל תת-מרחב Y של V המכיל את U ואת W מתקיים $U+W\subseteq Y$.

(באלים, $U+W$ הוא תת-המרחב הקטן ביותר האכיל את U וגם את W)

4.2 תרגיל. מצא את $U+W$ עבור כל אחד מהמקרים בתרגיל 3.4.

הפרכה מינימלית. טיפ לגבי שאלות "הוכח או הפרך": אם הטענה אינה נכונה, אז כמעט תמיד אפשר למצוא דוגמא נגדית כבר ב $\mathbb{R}^2$.

4.3 תרגיל. הוכח או הפרך:

א. יהיו U,V,W תת-מרחבים של מרחב וקטורי, אזי $U\cap(V+W)=U\cap V+U\cap W$.

ב. יהיו U,V,W תת-מרחבים של מרחב וקטורי, אזי $U\cap(V+W)\neq U\cap V+U\cap W$.

ג. יהיו U,V,W תת-מרחבים של מרחב וקטורי, אזי $U\cap(V+W)\subseteq U\cap V+U\cap W$.

אם $U\cap W=\{0\}$, נאמר שהסכום $U+W$ הוא **ישר** (ונכתוב $U\oplus W$).

4.4 תרגיל. הוכח שהסכום $U+W$ הוא ישר $\Leftrightarrow$ לכל $v\in U+W$ יש הצגה **יחידה** בצורה $v=u+w$ ($u\in U$, $w\in W$). (אגב, יש כאלו שלוקחים את התכונה השניה כמור הגדרה של סכום ישר)

4.5 תרגיל. יהיו

$$U=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\ :\ a_1=a_2=\dots=a_n\}\ ;V=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\ :\ a_1+a_2+\dots+a_n=0\}.$$

[א. הוכח ש U,V תת-מרחבים של $\mathbb{F}^n$]

ב. הוכח: $\mathbb{F}^n=U\oplus V$.

ג. עבור מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נגדיר $\Delta A:=(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})\in\mathbb{F}^n$. יהא U תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$, ונגדיר $U_\Delta:=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}\ :\ \Delta A\in U\}$. הוכח ש U_Δ תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

ד. עבור המרחבים U,V הנ"ל: האם $U_\Delta\oplus V_\Delta=\mathbb{F}^{n\times n}$?

4.6 תרגיל. יהא $V=\mathbb{F}^{n\times n}$, ויהיו U – המטריצות הסימטריות ו W – המטריצות האנטי-סימטריות (תת-מרחבים של V).

א. נניח ש $\mathrm{char}(\mathbb{F})\neq 2$. הוכח: $V=U\oplus W$. [ראה: שאלה בנושא "מטריצות סימטריות"]

ב. הפרך את הטענה במקרה $\mathrm{char}(\mathbb{F})=2$.

4.7 תרגיל. יהא V מרחב כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ויהיו U – **הפונקציות הזוגיות** (אלו המקיימות $f(-x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$), ו W – מרחב **הפונקציות האיזוגיות** (אלו המקיימות $f(-x)=-f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$).

[א. הוכח ש V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$]

[ב. הוכח ש U,W תת-מרחבים של V]

ג. הוכח: $V=U\oplus W$. (באלים: כל פונקציה ניתנת להצגה בצורה יחידה כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה איזוגית)

4.8 תרגיל. מצא $U_i,\ V_i\subseteq\mathbb{R}^n$ תת-מרחבים, כך ש: א. $U_1+V_1=\{0\}$. ב. $U_2\oplus V_2=\mathbb{R}^n$.

4.9 תרגיל. יהיו $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$ ו $B\in\mathbb{F}^{k\times r}$. ויהיו:

V_1 – מרחב הפתרונות של $(A\oplus O)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=0$; V_2 – מרחב הפתרונות של $(O\oplus B)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}=0$;

V_3 – מרחב הפתרונות של $(A\oplus B)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{r+m} \end{pmatrix}=0$. הוכח ש $V_3=V_1\oplus V_2$.

4.10 תרגיל. יהיו U, V מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. הוכח: $U\times V=(U\times\{0_V\})\oplus(\{0_U\}\times V)$.

5 צירופים לינאריים ותלות לינארית

יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1, \ldots, v_n\in V$. **צירוף לינארי** של $v_1, \ldots, v_n$ הוא ביטוי מהצורה:

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_nv_n$$

כאשר כל $\alpha_i\in\mathbb{F}$. אם **כל** $\alpha_i=0$, אז הצירוף הלינארי נותן $\vec{0}$ תמיד. לכן צירוף כזה נקרא **טריויאלי**. אנו מעוניינים בצירופים לא טריויאלים (**צל"ט**).

אם יש צל"ט של $v_1, \ldots, v_n$ שנותן $\vec{0}$, אנו אומרים ש $v_1, \ldots, v_n$ **תלויים לינארית**. אחרת, אומרים שהם **בלתי תלויים לינארית** (**בת"ל**).

5.1 תרגיל. בדוק האם הוקטורים הבאים תלויים לינארית ב $\mathbb{F}^n$ מעל $\mathbb{F}$, עבור $\mathbb{F}$ הנתון.

א. $(2,1,1); (1,2,2)$ מעל $F=\mathbb{R}$.

ב. כנ"ל, מעל $\mathbb{Z}_3$.

5.2 תרגיל. בדוק האם הוקטורים הבאים תלויים לינארית (ב $\mathbb{R}[x]$) מעל $\mathbb{R}$:

$f_1(x)=1+3x+x^2-2x^3-3x^4$; $f_2(x)=1+4x+3x^2-x^3-4x^4$; $f_3(x)=2+3x-4x^2-7x^3-3x^4$;

$f_4(x)=3+8x+x^2-7x^3-8x^4$.

5.3 תרגיל. מצא לאילו ערכים של a יהיו הוקטורים הבאים בת"ל ב $\mathbb{R}^3$:

$v_1=(1,2,a), v_2=(2a+1,2,3), v_3=(2,4,a-1)$.

5.4 תרגיל. בדוק האם המטריצות הבאות תלויות לינארית ב $\mathbb{R}^{2\times 3}$:

$$A=\begin{pmatrix} 16 & 10 & 9 \\ 3 & 8 & -11 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

5.5 תרגיל (פעולות נילסן). יהיו $v_1, \ldots, v_k\in V$ בת"ל. הוכח שכל אחת מהפעולות הבאות משאירות את סידרת הוקטורית בת"ל:

א. החלפת v_i ב v_i+v_j כאשר $i\neq j$.

ב. החלפת v_i ב αv_i כאשר $\alpha\neq 0$ סקלר.

ג. החלפת המקומות של v_i, v_j (כך ש v_i יופיע במקום j ו v_j יופיע במקום i).

ד. החלפת v_i ב $v_i+\alpha v_j$ $(j\neq i)$, לסקלר כלשהו α.

5.6 תרגיל. א. נניח שהוקטורים $v_1, \ldots, v_n$ תלויים לינארית ו $v_1\neq\vec{0}$. הוכח שיש $1<i\leq n$ כך ש v_i ניתן להצגה כצירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_{i-1}$.

ב. נניח שאחד הוקטורים בקבוצה $v_1, \ldots, v_n$ ניתן להצגה כצירוף לינארי של האחרים. הוכח שהוקטורים $v_1, \ldots, v_n$ ת"ל.

ג. הוכח שאם $v_1, \ldots, v_n$ בת"ל ו $v_1, \ldots, v_n, v$ תלויים לינארית, אזי v ניתן להצגה כצירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_n$.

תהי $\emptyset\neq S\subseteq V$ קבוצה כלשהי. S **תלויה לינארית** אם יש צירוף לינארי לא טריויאלי של (מספר סופי של) אברים שונים מ S, שנותן $\vec{0}$.

5.7 תרגיל. א. יהיו $v_1, \ldots, v_n$ וקטורים שונים. הוכח ש $v_1, \ldots, v_n$ תלויים לינארית $\Leftrightarrow$ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ תלויה לינארית.

ב. אם $S\subseteq A$ ו S תלויה לינארית, אז גם A תלויה לינארית.

ב. כל קבוצה המכילה את וקטור האפס היא תלויה לינארית.

ג. מצא קבוצה תלויה לינארית S כך ש $\#S=1$.

5.8 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי. הוכח, או הפרך ע"י דוגמא נגדית, כל אחת מהטענות הבאות:

א. תהא $A=\{a_1, \ldots, a_k\}\subseteq V$. אם A תלויה לינארית, אז כל קבוצה בת יותר מ k אברים היא תלויה לינארית.

ד. אם $\{u,v,w\}$ בת"ל, ו $\mathrm{char}(F)\neq 2$, אז גם $\{u+v, v+w, w+u\}$ בת"ל.

ה. אם $A\subseteq V$ תלויה לינארית, אז כל איבר של A הוא צירוף לינארי של האחרים.

ו. כל תת קבוצה של קבוצה תלויה לינארית היא תלויה לינארית.

ז. כל תת קבוצה של קבוצה בת"ל היא בת"ל.

6 המרחב הנפרש

יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ותהי $\emptyset\neq S\subseteq V$ קבוצה כלשהי. **הנפרשׂ** (או: **פְּרוֹשׂ**) **של** S הוא אוסף כל הצירופים הלינאריים של אברים מ S (מסומן: $\mathrm{span}(S)$, או: $\mathrm{sp}(S)$). מסמנים גם $\mathrm{span}(\emptyset):=\{\vec{0}\}$. אם $\mathrm{span}(S)=V$ אומרים שS **פורשת** את V. אם יש קבוצה סופית S שפורשת את V, אומרים ש V **מרחב נוצר סופית**.

6.1 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי, ותהי $S\subseteq V$.

א. הוכח ש $\mathrm{span}(S)$ הוא תת-מרחב של V המכיל את S.

ב. יהא W תת–מרחב של V המכיל את S. הוכח ש $\text{span}(S) \subseteq W$.

(באלים, $\text{span}(S)$ הוא תת–המרחב הקטן ביותר המכיל את S)

6.2 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי, ויהא U, W תת–מרחבים של V. הוכח:

א. $\text{span}(W) = W$.

ב. $\text{span}(U \cup W) = U + W$.

ג. עבור $A, B \subseteq V$ מתקיים: $\text{span}(A \cup B) = \text{span}(A) + \text{span}(B)$.

ד. $\text{span}(\text{span}(A)) = \text{span}(A)$.

6.3 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי, ויהיו $A, B \subseteq V$ קבוצות כלשהן. הוכח או הפרך:

א. $\text{span}(A+B) = \text{span}(A) \cup \text{span}(B)$.

ב. $\text{span}(A \cup B) = \text{span}(A) \cup \text{span}(B)$.

ג. $\text{span}(A+B) = \text{span}(A) + \text{span}(B)$.

ד. $\text{span}(A \cap B) = \text{span}(A) \cap \text{span}(B)$.

6.4 תרגיל. הוכח, או הפרך ע"י דוגמא נגדית, כל אחת מהטענות הבאות:

א. יהיו $A, B \subseteq V$ קבוצות כלשהן (לאו דוקא תת מרחבים). אם $\text{span}(A) \cap \text{span}(B) \neq \{0\}$, אזי $A \cup B$ ת"ל.

ב. אם $A \subseteq \text{span}(B)$ וכן $B \subseteq \text{span}(A)$, אזי $A = B$.

6.5 תרגיל. בכל אחד מהסעיפים הבאים, בדוק האם הנפרש שווה לקבוצה המושווית אליו. אם **כן**, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים. אם **לא**, מצא איבר שנמצא בקבוצה ולא בנפרש:

א. $\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} \text{span}\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\}$.

ב. $\mathbb{R}_3[x] \stackrel{?}{=} \text{span}\{1, x+x^2, 4x^3+x^2, 2x\}$ (מרחב הפולינומים ממעלה ≤ 3).

ג. $\mathbb{F}^{2\times 2} \stackrel{?}{=} \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}\right\}$.

6.6 תרגיל. בדוק האם $(1,2,4,5) \in \text{span}\{(2,1,5,2),(1,1,3,1),(1,-2,0,3)\}$. הסבר את פעולותיך.

7 בסיס ומימד

7.1 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי. הוכח את הטענות הבאות:

א. אם $A \subseteq V$ בת"ל שאינה פורשת את V, אז לכל $v \in V \setminus \text{span}(A)$, הקבוצה $A \cup \{v\}$ בת"ל.

ב. אם $A \subseteq V$ בת"ל, אז לכל $a \in A$, הקבוצה $A \setminus \{a\}$ אינה פורשת.

ג. **משפטון ההחלפה של שטייניץ**: יהא V מרחב וקטורי, ויהיו $A \subseteq V$ בת"ל ו $B \subseteq V$ פורשת. אזי לכל $a \in A$ אפשר למצוא $b \in B$ כך ש $b \notin A \setminus \{a\}$, והקבוצה $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ היא בת"ל. [רמז: אחרת $B \subseteq \text{span}(A \setminus \{a\})$, ולכן $A \setminus \{a\}$ פורשת]

7.2 תרגיל. יהיו $A=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ו $B=\{(8,10,12),(1,1,2),(1,0,2),(2,0,1)\}$ תת־קבוצות של $\mathbb{R}^3$.

א. הוכח ש A בת"ל ו B פורשת.

ב. לפי למת ההחלפה יש וקטור $b\in B$ כך ש $(A\setminus\{(1,2,3)\})\cup\{b\}=\{(4,5,6),b\}$ בת"ל. מצא וקטור כזה.

7.3 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי, ויהיו $A\subseteq V$ בת"ל ו $B\subseteq V$ פורשת. הוכח שיש קבוצה בת"ל $C\subseteq B$ כך ש $\#C=\#A$. הסק ש $\#A\leq\#B$.

יהא V מרחב וקטורי, ותהי $B\subseteq V$. B נקראת **בסיס** עבור V אם:

1. B בת"ל,
2. $\operatorname{span}(B)=V$.

7.4 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי, ותהיינה $A\subseteq V$ בת"ל ו $D\subseteq V$ פורשת, כך שכל איבר ב D הוא צרוף לינארי של אברי A. הוכח ש A בסיס.

7.5 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי עם בסיס סופי B, ויהא $\tilde{B}$ בסיס (אחר) של V. הוכח ש $\#\tilde{B}=\#B$.

לאור התרגיל האחרון, מגדירים את **המימד** של מרחב וקטורי V, $\dim(V)$, להיות מספר האברים בבסיס של V. אם ל V אין בסיס סופי, אנו אומרים ש $\dim(V)=\infty$. אם המימד של V סופי, אנו אומרים ש $\dim(V)<\infty$.

תרגיל.[0] הוכח שאם $\dim(V)<\infty$, אז V נוצר סופית.

אנו נראה שגם הטענה ההפוכה לזו שבתרגיל האחרון היא נכונה.

קבוצה בת"ל $B\subseteq V$ נקראת **בת"ל מקסימלית** אם לכל $v\in V\setminus B$, $B\cup\{v\}$ תלויה לינארית.

קבוצה פורשת $S\subseteq V$ נקראת **פורשת מינימלית** אם לכל $v\in S$, $S\setminus\{v\}$ אינה פורשת.

$7.5\frac{1}{2}$ תרגיל. יהא V מרחב וקטורי. אזי:

א. אם B קבוצה בת"ל מקסימלית ב V, אז B פורשת (ולכן בסיס).

ב. אם S קבוצה פורשת מינימלית ב V, אז S בת"ל (ולכן בסיס).

7.6 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי נוצר סופית. אזי:

א. אם S קבוצה פורשת סופית של V, אז S מכילה בסיס עבור V. [רמז: S סופית. ניקח $S_1\subset S$ שפורשת (אם יש), $S_2\subset S_1$ שפורשת (אם יש), וכו'. באיזשהו שלב לא נוכל להמשיך]

ב. אם S פורשת את V, אז $\dim(V)\leq\#S$.

ג. $\dim(V)<\infty$.

ד. אם S פורשת את V וכן $\dim(V)=\#S$, אז S בסיס עבור V. [רמז: לפי (ב), S פורשת מינימלית]

ה. אם B בת"ל וכן $\#B=\dim(V)$, אז B בסיס עבור V. [רמז: הוכח ש B בת"ל מקסימלית]

ו. אם B קבוצה בת"ל ב V, אז יש בסיס עבור V המכיל את B. [רמז: נתבונן באוסף הקבוצות הבת"ל המכילות את B. הגודל של כל אחת מהן אינו יותר מ $\dim(V)$. ניקח אחת מהן שגודלה מקסימלי. אזי היא בת"ל מקסימלית]

ז. אם B בת"ל ב V, אז $\#B\leq\dim(V)$.

התרגיל האחרון נותן לנו משפט שאפשר לכנות "השלישי חינם": יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי, ונסמן $n=\dim(V)$. אזי כל קבוצה $B\subseteq V$ המקיימת שתיים מהתכונות הבאות, מקיימת גם את השלישית (ולכן היא בסיס):

א. $\#B=n$.

ב. B פורשת את V.

ג. B בת"ל.

7.7 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי נוצר סופית, ויהא U תת-מרחב של V. הוכח:

א. $\dim(U)\leq\dim(V)$.

ב. אם $\dim(U)=\dim(V)$, אז $U=V$.

ג. אם $B\subseteq V$ קבוצה בת"ל המקיימת $\dim(\text{span}(B))=\dim(V)$, אזי B בסיס עבור V.

7.8 תרגיל. בדוק שהקבוצה הבאה בת"ל והשלם אותה לבסיס של $\mathbb{R}^5$:

$\{(1,2,3,4,5),(1,0,-1,-2,-3),(2,3,4,5,7)\}$.

7.9 תרגיל. נתונה הקבוצה הבאה:

$$\{(1,2,3,4,5),(5,4,3,2,1),(1,2,1,2,1),(5,3,2,4,6),(6,5,3,6,7),(5,7,8,2,1)\}$$

בדוק שהיא פורשת את $\mathbb{R}^5$, ומצא בסיס המוכל בה.

7.10 תרגיל. נתונות המטריצות $\begin{pmatrix}1&7\\1&3\\2&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\\0&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&34\\7&12\\8&35\end{pmatrix}\in M_{3\times2}(\mathbb{R})$.

א. האם הן תלויות לינארית?

ב. מצא בסיס למרחב הנפרש על ידי שלשת המטריצות.

7.11 תרגיל. יהיו $U,V\subseteq\mathbb{R}_3[x]$ התת-מרחבים הבאים:

$U:=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\ :\ p(0)=p(1)=0\},\ \ V:=\text{span}\{x^2-x,1+x\}$.

א. מצא בסיס ל $\text{span}(U\cup V)$.

ב. הוכח ש $U\cup V$ אינו תת-מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$.

7.12 תרגיל. א. יהא $\mathbb{F}$ שדה. מצא בסיס ל $\mathbb{F}$ כמרחב וקטורי מעל עצמו. מהו המימד?

ב. יהא $W \neq \{0\}$ תת-מרחב של $\mathbb{F}$. הוכח: $W = \mathbb{F}$.

ג. מצא בסיס ל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$. מהו המימד?

7.13 תרגיל. מצא את המימד של המרחבים הבאים:

א. $\mathbb{C}^3$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

ב. $\mathbb{C}^3$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

7.14 תרגיל. מצא את המימד של $\mathbb{C}^n$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

7.15 תרגיל (אוזני המן)[1]. מדוע עשרת בני המן אינם בסיס למרחב וקטורי? [רמז: הם לא בלתי תלויים]

7.16 תרגיל. הוכח שאם במערכת הומוגנית מספר הנעלמים גדול ממספר המשוואות, אזי יש למערכת פתרון לא טריויאלי. [רמז: הראה שיש צ"ל של עמודות המטריצה שנותן אפס]

7.17 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי, ותהא $B \subseteq V$. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. B בסיס עבור V.

ב. $\vec{0} \notin B$, ולכל קבוצה $A \subseteq B$ מתקיים $V = \mathrm{span}(A) \oplus \mathrm{span}(B \setminus A)$.

7.28 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהא U תת-מרחב של V. הוכח שקיים תת-מרחב W של V כך ש $V = U \oplus W$. [הדרכה: קח בסיס $\{u_1, \dots, u_k\}$ עבור U, והשלם אותו לבסיס $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ עבור V. קח $W = \mathrm{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$]

7.18 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד 3, ויהיו $v_1, v_2, v_3 \in V$ המקיימים $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. האם השויון $\mathrm{span}\{v_1\} + \mathrm{span}\{v_2\} + \mathrm{span}\{v_3\} = V$ נכון תמיד, לפעמים, או לעולם לא?

7.19 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה נילפוטנטית. הוכח: $A^n = O$. [רמז: יהי k המספר הקטן ביותר שעבורו $A^k = O$. יש v שעבורו $A^{k-1} v \neq 0$. הוכח ש $\{v, Av, A^2 v, \dots, A^{k-1} v\}$ בת"ל]

7.20 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהא $\mathbb{H}$ תת-שדה של $\mathbb{F}$ כך שהמימד של $\mathbb{F}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{H}$ הוא m. הוכח שהמימד של V כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{H}$ הוא mn.

7.21 תרגיל. א. יהא $V \subseteq \mathbb{F}^{n \times n}$ תת-מרחב. נסמן $V^t := \{A^t : A \in V\}$. הוכח ש V^t תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n \times n}$.

ב. יהא $\mathbb{D}$ בסיס עבור V. הוכח ש $\mathbb{D}^t := \{A^t : A \in \mathbb{D}\}$ בסיס עבור V^t.

ג. הסק מכך ש $\dim(V^t) = \dim(V)$.

7.22 תרגיל. מצא בסיס למרחבים הבאים, והסק מכך מהו מימדם.

(1) $\mathbb{F}^{n \times n}$.

(2) מטריצות טופליץ מגודל 3×3, כלומר מהצורה $\begin{pmatrix} c & b & a \\ d & c & b \\ r & d & c \end{pmatrix}$ כאשר $a,b,c,d,r\in\mathbb{F}$.

(3) **ריבועי קסם** מסדר 3×3: מטריצות שבהן סכום אברי כל שורה = סכום אברי כל עמודה.

(4) מטריצות משולשיות עליונות.

[(5) מטריצות משולשיות תחתונות]

7.23 תרגיל. יהא V מרחב הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, עם ההגדרות $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$, וכן $(\alpha f)(x):=\alpha\cdot f(x)$ (לכל $\alpha\in\mathbb{R}$).

[א. הוכח שזהו מרחב וקטורי]

לכל $a\in\mathbb{R}$, נגדיר $f_a(x):=\delta_{ax}=\begin{cases}1 & x=a\\ 0 & x\neq a\end{cases}$. יהא $U:=\{f_a(x)\ :\ a\in\mathbb{R}\}$.

ב. הוכח ש U תת-מרחב של V.

ג. הוכח שאין בסיס סופי ל U מעל $\mathbb{R}$. (במלים אחרות, $\dim(U)=\infty$)

7.24 תרגיל. יהא $\mathbb{F}_n[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל n מעל $\mathbb{F}$.

א. הוכח שהקבוצה $B=\{1,x-\alpha,(x-\alpha)^2,\ ...\ ,(x-\alpha)^n\}$ מהווה בסיס עבור המרחב.

ב. מצא בסיס עבור המרחב, כך שכל אבריו הם פולינומים ממעלה n.

7.25 תרגיל[!]. יהיו נתונים $a_1,\ ...\ ,a_n\in\mathbb{R}$ שונים זה מזה. לכלל $1\leq i\leq n$ נגדיר פולינום f_i ממעלה $n-1$, בצורה הבאה:

$$f_i(x):=\frac{(a_1-x)(a_2-x)\ ...\ (a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\ ...\ (a_n-x)}{(a_1-a_i)(a_2-a_i)\ ...\ (a_{i-1}-a_i)(a_{i+1}-a_i)\ ...\ (a_n-a_i)}$$

פולינומים אלו נקראים **פולינומי לגרנז'**.

א. בדוק שלכל i, $f_i(a_j)=\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases}$ (כלומר $f_i(a_j)=\delta_{ij}$).

ב. הוכח ש $\{f_1,\ ...\ ,f_n\}$ בת"ל. [העזר ב(א)]

ג. הסק ש $\{f_1,\ ...\ ,f_n\}$ בסיס עבור $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

ד. נתבונן במקרה $n=3$. מצא פולינום $f\in\mathbb{R}_2[x]$ המקיים $f(1)=6;f(2)=17;f(3)=34$.

רמז: f הוא צירוף לינארי של הפולינומים f_1,f_2,f_3 הנ"ל. (שים לב כמה זה מעניין: אתם יכולים לבנות בצורה זו פולינומים העוברים דרך נקודות כרצונכם!).

ה. מצא את הפולינום f **בשיטת ונדרמונדה**: נכתוב $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ ונציב את הנתונים. $f(1)=6$ ולכן $6=a_0+a_1+a_2$ וכו'. נקבל מערכת משוואות (הנעלמים הם a_0,a_1,a_2) ונפתור אותה לקבל את המקדמים. בדוק שהפולינום שקיבלת בשיטה זו שווה לפולינום שקיבלת בשיטה הקודמת.

סדרה (אינסופית) $\langle a_1,a_2,a_3,\ ...\ \rangle$ של אברי $\mathbb{R}$, המקיימת $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ לכל $n=3,4,\ ...$ נקראת **סדרת פיבונצ'י** (ע"ש המתמטיקאי האירופאי הראשון בעידן "החדש", לאונרדו "פיבונצ'י" מפיזה, שדרכו נודע לאירופה האפס ושיטת המספרים הערבית, מספרו בגאומטריה של הרב אברהם בר חייא ראשית המאה הי"ב).

7.26 תרגיל[!]. יהא V מרחב **כל** הסדרות (האינסופיות) של אברים מ $\mathbb{R}$. זהו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ (לא

מוכיח!), כאשר הפעולות הן:

- $\alpha\langle a_1,a_2,\ldots\rangle:=\langle\alpha a_1,\alpha a_2,\ldots\rangle$,
- $\langle a_1,a_2,\ldots\rangle+\langle b_1,b_2,\ldots\rangle:=\langle a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots\rangle$.

והאפס הוא $\langle 0,0,0,\ldots\rangle$.

יהא W אוסף סדרות הפיבונצ׳י.

א. הוכח שזהו מרחב וקטורי. [ראז: תת-מרחב ...]

ב. נתון כי הסדרה $\langle 1,q,q^2,q^3,\ldots\rangle$ היא סדרת פיבונצ׳י. מהן האפשרויות עבור q?

ג. הוכח שהסדרות שמתקבלות מ-q-ים אלה אינן תלויות לינארית.

ד. הוכח שהן פורשות את W. הסק שהן מהוות בסיס ל-W. [ראז: מספיק להסתכל על a_1 ו a_2, והשאר נובע]

ה. נתונה סידרת פיבונצ׳י שבה $a_1=a_2=1$. חשב את הסכום $\sum_{i=1}^{20}a_i$ בקירוב, **מבלי** למצוא את אברי הסידרה. [ראז: הצג את הסדרה $\langle a_1,a_2,\ldots\rangle$ כצירוף לינארי של סדרות הבסיס, והשתמש בנוסחה של סכום טור גאומטרי (ראה תרגיל רלוונטי בנושא שדות). בחישוב הסופי העזר במחשבון]

7.29 תרגיל. יהיו $U,V\subseteq\mathbb{R}^4$ המרחבים הבאים: $U=\mathrm{span}\{(3,-1,6,-6),(1,1,2,0),(1,-1,2,-3)\}$; $V=\mathrm{span}\{(1,0,1,0),(0,-2,0,3)\}$. מצא את בסיס ומימד עבור $U+V, U\cap V, U, V$.

7.30 תרגיל. עבור מטריצה קבועה $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, נגדיר $V_B:=\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2} : AB=BA\}$.

א. הוכח כי V_B תת-מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

ב. יהיו $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. מצא בסיס עבור V_B, V_C, $V_B\cap V_C$, V_B+V_C.

ג. השלם כל אחד מהבסיסים הנ״ל לבסיס עבור $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

7.31 תרגיל. נגדיר שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_3[x]$:

$$U:=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x] : p(1)=0\},\quad V:=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x] : p(2)=0\}.$$

מצא את המימד של $V\cap U$.

7.32 תרגיל. יהיו $U,V\subseteq\mathbb{C}^{2\times 2}$ התת-מרחבים הבאים:

$$U:=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&\bar{b}\end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{C}\right\},\quad V:=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\\bar{b}&c\end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{C}\right\}.$$

מצא בסיס ל $U\cap V$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

8 משפט המימדים

8.1 תרגיל (יחידות ההצגה לפי בסיס). יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}\subseteq V$ בסיס. הוכח שלכל $v\in V$ יש דרך אחת ויחידה לבחור $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ עבורם $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_nv_n$.

8.2 תרגיל. הוכח את **משפט המימדים**: יהיו U,W תת-מרחבים של מרחב וקטורי V ממימד סופי. הוכח:

$.\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$

הדרכה: א. יהי B_0 בסיס עבור $U\cap W$. השלם אותו לבסיס B_1 עבור U, ולבסיס B_2 עבור W.

ב. נסמן $B:=B_1\cup B_2$. הראה ש B פורש את $U+W$, בעזרת התרגיל על נפרש של איחוד קבוצות.

ג. הוכח ש B בת"ל: נניח $B_0=\{v_1,\dots,v_k\}$, $B_1=B_0\cup\{u_1,\dots,u_m\}$, $B_2=B_0\cup\{w_1,\dots,w_l\}$, ונניח

$$(*)\quad .\underbrace{\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k}_{v}+\underbrace{\beta_1 u_1+\dots+\beta_m u_m}_{u}+\underbrace{\gamma_1 w_1+\dots+\gamma_l w_l}_{w}=\vec{0}$$

אזי $W\ni -w=v+u\in U$, לכן ניתן להציגו $-w=\tilde{\alpha}_1 v_1+\dots+\tilde{\alpha}_k v_k$, לכן איחידות ההצגה של $-w$, $\beta_1=\dots=\beta_m=0$

והצבה ב $(*)$ תראה שגם שאר הסקלרים הם 0.

ד. הסק ממספר הוקטורים ב B_0,B_1,B_2,B את משפט המימדים]

$8.2\frac{1}{2}$ תרגיל. הוכח או הפרך:

א. יהיו $V,W\subseteq\mathbb{R}^{10}$ המקיימים $\dim(V)=9$; $\dim(W)=8$. **אזי** $\dim(V\cap W)=7$.

ב. יהיו $V,W\subseteq\mathbb{R}^{10}$ המקיימים $\dim(V)=3$; $\dim(W)=4$ **ונתון** $V\nsubseteq W$. **אזי** $\dim(V\cap W)=2$.

ג. יהיו $U,W\subseteq V$ תת-מרחבים. **אזי** $V=U\oplus W \Leftrightarrow \dim(V)=\dim(U)+\dim(W)$.

ד. יהיו $V_1,V_2\subseteq V$ תת-מרחבים המקיימים $\dim(V)=7$; $\dim(V_2)=4$; $\dim(V_1)=5$. **אזי** $2\le\dim(V_1\cap V_2)\le 4$.

8.3 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד 5, ויהיו U,W תת-מרחבים ממימד 3,4 בהתאמה. מהן האפשרויות עבור $\dim(U\cap W)$? הוכח!

8.4 תרגיל. יהיו $U_1,U_2,U_3\subseteq V$, תת-מרחבים המקיימים $\dim(U_2)<\dim(U_3)$ וכן $U_1+U_2=U_1+U_3$. האם $\dim(U_1\cap U_2)$ קטן, גדול, או שווה ל $\dim(U_1\cap U_3)$.

8.5 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n, ויהיו U,W תת-מרחבים כך ש $\dim(U)=n-1$ ו $W\nsubseteq U$. הוכח: $U+W=V$. [רמז: יש כמה דרכים, והנוחה מכולם היא ע"י משפט המימדים]

9 הצגת וקטורים לפי בסיס

לאור המשפטון על יחידות ההצגה (סעיף קודם), מגדירים את **ההצגה של וקטור** v **לפי הבסיס** B להיות **וקטור המקדמים** שעבורם $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n$, וכותבים $[v]_B:=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$.

9.1 תרגיל. יהא B בסיס עבור מרחב וקטורי V ממימד n מעל $\mathbb{F}$. הוכח את הטענות הבאות.

א. $v=0_V \Leftrightarrow [v]_B=(0,\dots,0)$ $(v\in V)$.

ב. $[v]_B=[w]_B \Leftrightarrow v=w$ $(v,w\in V)$.

ג. לכל $\vec{a}\in\mathbb{F}^n$ יש $v\in V$ כך ש $[v]_B=\vec{a}$.

ד. $[\alpha v+\beta w]_B=\alpha[v]_B+\beta[w]_B$ $(v,w\in V$ ו $\alpha,\beta\in\mathbb{F})$.

9.2 תרגיל[1]. א. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה סופי $\mathbb{F}$, ויהא $n=\dim(V)$. הוכח: $\#V=(\#\mathbb{F})^n$.

ב. יהא $\mathbb{F}$ שדה סופי ממאפיין p. הוכח שיש n טבעי כך ש $\#\mathbb{F}=p^n$. [רמז: לפי תרגיל בנושא "מאפיין של שדות", $\mathbb{Z}_p\subseteq\mathbb{F}$. לכן לפי תרגיל בנושא "תת-מרחבים", $\mathbb{F}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}_p$]

ג. הסק שהגודל של מרחב וקטורי מעל שדה סופי הוא חזקה של מספר ראשוני.

9.3 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1,\dots,v_n,b\in V$ כלשהם. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. $b=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$.

ב. לכל בסיס B של V, הוקטור $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ הוא פתרון למערכת $Ax=[b]_B$,

כאשר $A=([v_1]_B,\dots,[v_n]_B)$ (הוקטורים כתובים בעמודות A).

ג. קיים בסיס B של V, כך שמתקיים האמור בסעיף (ב).

מהתרגיל האחרון נובע, שכדי להציג וקטור מסויים b כצירוף לינארי של וקטורים אחרים, כל שיש לעשות הוא לפתור את המערכת $([v_1]_B,\dots,[v_n]_B)x=[b]_B$, כלומר לדרג את המטריצה $([v_1]_B,\dots,[v_n]_B\mid[b]_B)$. בדרך כלל אפשר לבחור בסיס B "סטנדרטי", ואז המשימה קלה מאד.

בסיסים סטנדרטיים: יהא V מרחב וקטורי. נאמר ש $S\subseteq V$ **בסיס סטנדרטי** אם הכתיבה ה"טבעית" של איבר של V היא כצירוף לינארי של אברי S (הרעיון הוא שכל v יהיה מייד לכמוה את $[v]_S$). למשל: יהא $V=\mathbb{F}^n$ נגדיר **וקטור בסיסי** e_i $(i=1,2,\dots,n)$ לפי 1 במקום i ואפס בשאר הרכיבים.

9.4 תרגיל. א. הוכח שלכל וקטור $v=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{F}^n$ מתקיים $v=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n$.

ב. הסק שלכל $v\in\mathbb{F}^n$ מתקיים $v=[v]_S$.

לאור התרגיל, קוראים ל $S=\{e_1,\dots,e_n\}$ **הבסיס הסטנדרטי של** $\mathbb{F}^n$. בסיסים סטנדרטיים נוספים:

- $V=\mathbb{F}_n[x]$: $S=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$.
- $V=\mathbb{F}^{n\times n}$: $S=\{E_{ij}: i,j=1,\dots,n\}$.

9.5 תרגיל. כתוב את $v=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ כצירוף לינארי של $1,x,x^2,\dots,x^n$. למה זה טריויאלי?

9.6 תרגיל. הצג את המטריצה $\begin{pmatrix}30&24\\22&24\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של המטריצות:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}$$

מעל $\mathbb{R}$. [רמז: מהו הבסיס ה"סטנדרטי" של $\mathbb{F}^{2\times2}$?]

10 מטריצות מעבר בין בסיסים

10.1 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{F}$. לכל שני בסיסים B,C של V יש מטריצה יחידה

$P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ המקיימת $P[v]_B=[v]_C$ לכל $v\in V$. [רמז: תרגיל בסעיף הקודם]

המטריצה שמוגדרת במשפט הנ"ל נקראת **מטריצת מעבר בין בסיסים**. (למרבה הצער, אין הסכמה בין המרצים האם לקרוא לה "מטריצת המעבר מ B ל C", או "מטריצת המעבר מ C ל B". אנו פשוט נקרא לה "המטריצה המקיימת $P[v]_B=[v]_C$"). נסמן את המטריצה המקיימת $P[v]_B=[v]_C$ לכל $v\in V$ בסימון הבא: $[I]_C^B$. לסימון הזה יש סיבה טובה, שנראה אותה כאשר נלמד הצגות של העתקות לינאריות. בינתיים רק נזכור את התכונה המגדירה את המטריצה:

$$[I]_C^B[v]_B=[v]_C \text{ לכל } v\in V.$$

10.2 תרגיל. א. תהא P המטריצה המקיימת $P[v]_B=[v]_C$, ותהא Q המטריצה המקיימת $Q[v]_C=[v]_B$. הוכח ש $Q=P^{-1}$. במלים אחרות, הוכח ש $[I]_C^B=([I]_B^C)^{-1}$. [רמז: הוכח שלכל $x\in\mathbb{F}^n$ מתקיים $QPx=x$. מדוע זה מספיק?]

ב. הוכח: $[I]_{B_3}^{B_1}=[I]_{B_3}^{B_2}\cdot[I]_{B_2}^{B_1}$. (כדי לזכור זאת, חשוב כאילו ה B_2 השמאלי העליון והימני התחתון מצטמצמים)

בתרגיל הבא נראה שהבסיסים הסטנדרטיים שימושיים מאד למציאת מטריצות מעבר בצורה "טכנית" פשוטה.

10.5 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי, ונניח שיש לו בסיס סטנדרטי S. יהא $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ בסיס (אחר) כלשהו של V.

א. הוכח שהמטריצה $P:=([b_1]_S,\dots,[b_n]_S)$ (וקטורי B כעמודות) מקיימת $P[v]_B=[v]_S$ (לכל $v\in V$). במלים אחרות,

$$[I]_S^B=([b_1]_S,\dots,[b_n]_S).$$

ב. יהיו $V=\mathbb{R}_2[x]$, $S=\{1,x,x^2\}$, $B=\{1,2-x,3x^2\}$. מצא בעזרת (א) את המטריצה המקיימת $P[v]_B=[v]_S$.

ג. עבור המקרה שבסעיף (ג), מצא את המטריצה המקיימת $P[v]_S=[v]_B$. [רמז: $[I]_B^S=([I]_S^B)^{-1}$]

ד. יהא $C=\{1+x^2,x+x^2,x^2\}$. מצא את המטריצה המקיימת $Q[v]_C=[v]_S$, **ובעזרתה** מצא את המטריצה המקיימת $A[v]_C=[v]_B$. [רמז: $[I]_B^C=[I]_B^S\cdot[I]_S^C$]

ה. הוכח את הטענה הבאה: יהא V מרחב וקטורי עם בסיס סטנדרטי S. יהיו $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ ו $C=\{c_1,\dots,c_n\}$ בסיסים (אחרים) של V. אזי המטריצה $A=([c_1]_S,\dots,[c_n]_S)^{-1}([b_1]_S,\dots,[b_n]_S)$ מקיימת $A[v]_B=[v]_C$ לכל $v\in V$. במלים אחרות:

$$[I]_C^B=([c_1]_S,\dots,[c_n]_S)^{-1}([b_1]_S,\dots,[b_n]_S).$$

ו. (דוגמה מוחשית מההתחלה ועד הסוף) יהא $V=\mathbb{R}^2$, עם הבסיסים $B=\{(4,5),(1,0)\}$, $C=\{(1,1),(2,3)\}$. מצא את המטריצה המקיימת $P[v]_B=[v]_C$.

11 מרחב השורות והעמודות של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

מרחב העמודות של A = תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$ הנפרש ע"י עמודות A = $\{Av : v\in\mathbb{F}^n\}$.

מרחב השורות של A = תת-מרחב של $\mathbb{F}^m$ הנפרש ע"י שורות A = $\{A^t v : v\in\mathbb{F}^m\}$ = מרחב העמודות של A^t.

דרגת העמודות/השורות של A = מימד מרחב העמודות/השורות של A.

11.1 תרגיל. מצא את דרגת השורות ואת דרגת העמודות של המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$: $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}$.

11.2 תרגיל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. למערכת $Ax=b$ יש פתרון.

ב. למטריצות A ו $(A|b)$ יש אותה דרגת עמודות.

ג. b שייך למרחב העמודות של A.

11.3 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$. לאילו וקטורים b יש פתרון למערכת $Ax=b$?

11.4 תרגיל. הוכח שדרגת השורות של מטריצה שווה לדרגת העמודות שלה.

הדרכה: תהא k דרגת העמודות של A. יהא $\{b_1, \dots ,b_k\}$ בסיס למרחב העמודות של A. נסמן $B=(b_1, \dots ,b_k)\in\mathbb{F}^{m\times k}$.

א. הוכח שיש מטריצה $C\in\mathbb{F}^{k\times n}$ כך ש $A=BC$. [רמז: תרגיל מסוים בנושא כפל מטריצות]

ב. הוכח שדרגת השורות של A $\leq$ דרגת השורות של C. [רמז: אותו תרגיל מסוים]

ג. כעת, דרגת השורות של C $\leq k$ (מדוע?). לכן דרגת השורות של A $\leq k$.

כיון שלכל מטריצה A, דרגת השורות של A = דרגת העמודות של A, פשוט קוראים לערך זה **דרגת המטריצה**, ומסמנים אותו $\mathrm{rank}(A)$.

11.5 תרגיל. נתונה המטריצה הממשית הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\9&8&7&6&5\\7&4&1&-2&-5\end{pmatrix}$$

א. מצא בסיס למרחב השורות של A. מהו מימדו?

ב. מהו מימד מרחב העמודות של A? מצא בסיס למרחב זה ואשר את טענתך.

11.6 תרגיל. א. הוכח שתמיד $\mathrm{rank}(AB)\leq\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)$. [רמז: תרגיל מסוים בנושא כפל מטריצות]

ב. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: A הפיכה $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=n$. [רמז: השווה לתכונה "לכל b, יש פתרון למערכת $Ax=b$"]

ג. הוכח שאם $AB=I$, אזי $BA=I$. [רמז: לפי (א)+(ב), A הפיכה ולכן יש C כך ש $AC=CA=I$. הוכח ש $C=B$]

ד. הוכח שאם $m<n$, ו $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, אזי המטריצה $A^tB\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אינה הפיכה.

11.7 תרגיל. א. הוכח שאם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה ו $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$, אזי $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)$.

ב. נסח והוכח טענה דומה עבור מכפלה BA כאשר $B\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

11.8 תרגיל. מצא דוגמאות של מטריצות A,B עבורן:

(1) $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

(2) $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)<\mathrm{rank}(B)$.

(3) $\mathrm{rank}(AB)<\mathrm{rank}(A)$ וכן $\mathrm{rank}(AB)<\mathrm{rank}(B)$.

11.9 תרגיל. יהא $2\leq n$ טבעי. הוכח שלכל $k=0,1,\dots,n$ קיימות מטריצות $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ עם $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=n$, ו $\mathrm{rank}(A+B)=k$.

11.10 תרגיל*. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$. הוכח:

א. $\mathrm{rank}(A+B)\leq\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$ (זה מציין "אי-שוויון משולש").

ב. לכל $0\neq\alpha\in\mathbb{F}$, $\mathrm{rank}(A+\alpha B)\geq|\mathrm{rank}(A)-\mathrm{rank}(B)|$. [רמז: הראה ש $\mathrm{rank}(\alpha B)=\mathrm{rank}(B)$. היעזר ב(א) עם $A'=A+\alpha B, B'=-\alpha B$]

11.11 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח ש א ⇐ב ⇐ג ⇐ד ⇐ה ⇐ו ⇐ז ⇐א, ולכן התנאים הבאים שקולים:

א. A הפיכה.

ב. לכל $b\in\mathbb{F}^n$, למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד. [רמז: $x=A^{-1}b$]

ג. קיים $b\in\mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.

ד. למערכת $Ax=0$ יש רק את הפתרון הטריויאלי $x=0$. [רמז: המשפט על הקשר בין הפיתרונות של המערכת ההומוגנית והלא-הומוגנית]

ה. עמודות A בת"ל.

ו. $\mathrm{rank}(A)=n$.

ז. שורות A בת"ל.

[רמז עבור ז ⇐א: הוכח שיש וקטורי שורה $v_1,\dots,v_n$ כך ש $v_iA=e_i$, והראה שהמטריצה ששורותיה הן v_i הופכית (משמאל) של A]

11.12 תרגיל. הוכח (בעזרת התרגיל הקודם) שהתכונות הבאות שקולות:

א. לכל $b\in\mathbb{F}^n$, למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.

ב. לכל $b\in\mathbb{F}^n$, למערכת $Ax=b$ יש פתרון.

11.13 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. A אינה הפיכה.

ב. עמודות A תלויות לינארית.

ג. $\mathrm{rank}(A)<n$.

ד. שורות A תלויות לינארית.

ה. קיים $b\in\mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.

ו. למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש פתרון לא טריויאלי.

11.14 תרגיל. נתונה המערכת ההומוגנית $Ax=0$, ונתון שיש למערכת פתרון לא טריויאלי. הוכח או הפרך: לכל מטריצה B, למערכת $(AB)x=0$ יש פתרון לא טריויאלי.

11.15 תרגיל. יהיו $b=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$.

א. דרג את A ואת $(A|b)$. [רמז: לא צריך לעשות אותה עבודה פעמיים!]

ב. מהם $\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(A|b)$? האם זה אומר שיש (או שאין) למערכת $Ax=b$ פתרון?

ג. מהו מימד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$?

ד. מצא בסיס למרחב האפס של A.

ה. בדוק שהוקטור $(1,-1,1,-1)$ הוא פתרון למערכת $Ax=b$, ו מצא פתרון כללי למערכת $Ax=b$. נמק!

11.16 תרגיל!. א. כמה מטריצות הפיכות מסדר $n\times n$ יש מעל השדה $\mathbb{Z}_p$? [רמז: בכמה דרכים אפשר לבחור את השורה הראשונה של המטריצה? אחרי שבחרנו אותה, בכמה דרכים אפשר לבחור את השורה השניה? וכו']

ב. כמה בסיסים שונים יש עבור $\mathbb{Z}_p^n$? (רק כדי לבדוק שלא נרדמת ...)

11.17 תרגיל!. **לוחות החיבור והכפל של שדה**: יהא $\mathbb{F}=\{a_1,\dots,a_n\}$ שדה סופי.

א. נגדיר מטריצה $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לפי $p_{ij}:=a_i+a_j$. האם P הפיכה?

ב. נגדיר מטריצה $M\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לפי $m_{ij}:=a_i\cdot a_j$. האם M הפיכה?

ג. יהא $\mathbb{F}^*:=\mathbb{F}\setminus\{0\}=\{b_1,\dots,b_{n-1}\}$. נגדיר מטריצה $M^*\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ לפי $m_{ij}:=b_i\cdot b_j$. האם M^* הפיכה?

11.18 תרגיל. א. הוכח שפעולת שורה אלמנטרית אינה משנה את דרגת המטריצה.

ב. תהא A מטריצה כלשהי, ותהא B המטריצה המתקבלת מ A ע"י תהליך הדרוג של גאוס. הוכח שמרחב השורות של A = מרחב השורות של B.

ג. יהיו A,B כנ"ל. הראה שהשורות ב B שאינן אפס מהוות בסיס למרחב השורות של A.

פרק ה: העתקות לינאריות

1 העתקות לינאריות

יהיו W, V מרחבים וקטוריים מעל **אותו שדה** $\mathbb{F}$. פונקציה $T: V \to W$ נקראת **העתקה לינארית**, או: **טרנספורמציה לינארית**, אם T שומרת על חיבור וקטורים ועל כפל בסקלר, כלומר:

- לכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$, וכן
- לכל $v \in V$ ו $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $T(\alpha v)=\alpha T(v)$.

1.1 תרגיל. יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהא $T: V \to W$ העתקה לינארית. הוכח: $T(\vec{0})=\vec{0}$. (ההוכחה צריכה להיות נכונה בלי קשר לאפיין של השדה $\mathbb{F}$.)

1.2 תרגיל. הוכח את **הקריטריון הקצר בעולם ללינאריות של העתקה**: $T: V \to W$ היא לינארית אם ורק אם לכל $v_1, v_2 \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $T(v_1+\alpha v_2)=T(v_1)+\alpha T(v_2)$.

שני התנאים ללינאריות של העתקה הם הכרחיים.

1.3 תרגיל. א. מצא מרחב וקטורי V והעתקה $T: V \to V$ כך שלכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$, ובכל זאת לא מתקיימת הדרישה $T(\alpha v)=\alpha T(v)$ לכל $\alpha \in \mathbb{F}, v \in V$. [רמז: צאוד ארוכה]

ב. יהיו U, V מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{Z}_p$, ותהא $T: V \to U$ העתקה כך שלכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$. הוכח שמתקיים $T(\alpha v)=\alpha T(v)$ לכל $\alpha \in \mathbb{Z}_p, v \in V$. למה הטיעון הזה לא עובד ב(א)?

ג. מצא מרחב וקטורי V והעתקה $T: V \to V$ כך שלכל $v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $T(\alpha v)=\alpha T(v)$, ובכל זאת לא מתקיימת הדרישה $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$ לכל $v_1, v_2 \in V$. [רמז: קח $V=\mathbb{R}^2$, ובחר העתקה של כפל בסקלר אחד אם הוקטור ברביע ראשון או שלישי, ובסקלר אחר במקרה הנותר]

1.4 תרגיל. יהיו $S, T: V \to W$ העתקות לינאריות המתלכדות על בסיס (או אפילו רק קבוצה פורשת) $\{v_1, \dots, v_n\}$ של V (כלומר לכל $i=1, \dots, n$ מתקיים $T(v_i)=S(v_i)$). הוכח ש $S=T$, כלומר לכל $v \in V$ מתקיים $S(v)=T(v)$.

אוסף ההעתקות הלינאריות $T: V \to W$ מסומן $\mathrm{Hom}(V, W)$. מגדירים פעולות על אוסף זה בצורה הבאה:

- עבור $T, S \in \mathrm{Hom}(V, W)$, ההעתקה $T+S \in \mathrm{Hom}(V, W)$ מוגדרת ע״י $(T+S)(v):=T(v)+S(v)$.
- עבור $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ וסקלר $\alpha \in \mathbb{F}$, ההעתקה αT מוגדרת ע״י $(\alpha T)(v):=\alpha \cdot T(v)$.

1.5 תרגיל. הוכח $T+S$ וכן αT המוגדרות לעיל הן העתקות לינאריות מ V ל W (ולכן שייכות ל $\mathrm{Hom}(V, W)$).

[**$1.5\frac{1}{2}$ תרגיל**. הוכח שהאוסף $\mathrm{Hom}(V,W)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$]

1.6 תרגיל. בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרת העתקה $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. מצא באילו מהם ההעתקה לינארית.

א. $T(x)=2x$.

ב. $T(x)=2x+1$.

ג. $T(x)=x^2$.

ד. $T(x)=|x|$.

ה. $T(x)=\cos(x)$.

ו. $T(x)=[x]$. (הערך השלם של x)

1.7 תרגיל. יהא $\mathbb{F}$ שדה, ותהא $T:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ העתקה לינארית. הוכח שקיים $\alpha\in\mathbb{F}$ עבורו $T(x)=\alpha x$ לכל $x\in\mathbb{F}$. [רמז: הראה שלכל $x\in\mathbb{F}$ מתקיים $T(x)=xT(1)$]

1.8 תרגיל. תהא $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ההעתקה המוגדרת ע"י $T(z)=\overline{z}$. קבע האם היא לינארית:

א. כאשר $\mathbb{C}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

ב. כאשר $\mathbb{C}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

1.9 תרגיל. הוכח שההעתקה $\mathrm{tr}:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$ היא לינארית.

1.10 תרגיל. **א.** נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ לפי: $T(x,y)=(x+2y,2x+y)$ הוכח (ישירות) ש T העתקה לינארית.

ב. **העתקת המטריצה**: נקבע מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. נגדיר $T:\mathbb{F}^{n\times 1}\to\mathbb{F}^{1\times m}$, $S:\mathbb{F}^{m\times 1}\to\mathbb{F}^{n\times 1}$ ע"י $T(v)=Av$ ו $S(v)=v^tA$. הוכח ש T,S העתקות לינאריות.

ג. השתמש ב(ב) להוכיח את (א) בדרך אחרת.

ד. הוכח שאם $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $0\neq b\in\mathbb{F}^m$ ו $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ מוגדרת ע"י $T(v)=Av+b$, אזי T אינה העתקה לינארית.

ה. נסח והוכח את סעיפים (ב) ו(ד) עבור המקרה הכללי: $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, ו $T:\mathbb{F}^{n\times k}\to\mathbb{F}^{m\times k}$.

1.11 תרגיל. תהא $T:V\to W$ העתקה לינארית. הוכח:

א. אם $T(v_1),\ldots,T(v_n)$ בת"ל, אז גם $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל.

ב. אם T חד-חד ערכית, ו $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל, אז גם $T(v_1),\ldots,T(v_n)$ בת"ל.

1.12 תרגיל. **א.** האם יש העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ כך ש T על?

א. האם יש העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ כך ש T חד-חד ערכית?

1.13 תרגיל. הוכח:

א. אם יש העתקה לינארית $T:V\to W$ על, אז $\dim(V)\geq\dim(W)$.

ב. אם יש העתקה לינארית $T:V\to W$ חד-חד ערכית, אז $\dim(V)\leq\dim(W)$.

יהיו V, W מרחבים וקטוריים. **העתקת האפס** $O: V \to W$ מוגדרת ע"י $O(v)=0$ לכל $v \in V$.
יהא V מרחב וקטורי. **העתקת הזהות** $I_V: V \to V$ מוגדרת ע"י $I_V(v)=v$ לכל $v \in V$.

1.14 תרגיל. הוכח שהעתקות האפס והזהות הן העתקות לינאריות.

יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים, ויהיו $T: V \to W$, $S: W \to U$ העתקות. **העתקת ההרכבה** $ST: V \to U$ מוגדרת ע"י $ST(v)=S(T(v))$ לכל $v \in V$.

1.15 תרגיל. בסימונים הנ"ל, הוכח שאם T,S העתקות לינאריות, אזי גם ההרכבה TS היא העתקה לינארית.

1.16 תרגיל. נקבע מטריצות $A \in \mathbb{F}^{k\times n}, B \in \mathbb{F}^{m\times p}$. הוכח שההעתקה $T: \mathbb{F}^{n\times m} \to \mathbb{F}^{k\times p}$ המוגדרת ע"י $T(X)=AXB$ היא העתקה לינארית. [ראה: נוכח אתרגילים קודמים]

הצבת העתקה לינארית בפולינום: יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. עבור
פולינום $f(x)=a_0+a_1x+ \dots +a_nx^n \in \mathbb{F}[x]$, נגדיר העתקה לינארית $f(T): V \to V$ בצורה הבאה:

$$f(T):=a_0I_V+a_1T+ \dots +a_nT^n,$$

כאשר עבור k טבעי, T^k פירושו הרכבת ההעתקה T על עצמה k פעמים: $T^k:=\overbrace{T\circ T\circ \dots \circ T}^{k \text{ פעמים}}$.

1.17 תרגיל. הוכח שהעתקה $f(T)$ כנ"ל היא העתקה לינארית.

1.18 תרגיל. נזכור שעבור מטריצה A, אנו מסמנים ב L_A את ההעתקה הלינארית של כפל משמאל ב A.
הוכח: לכל $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ולכל $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים $f(L_A)=L_{f(A)}$.

יהיו U, V מרחבים וקטוריים. העתקה $T: V \to U$ היא **הפיכה** אם יש העתקה $S: U \to V$ כך ש $TS=I_U$ וכן $ST=I_V$. במקרה כזה, מסמנים $T^{-1}:=S$.

1.19 תרגיל. בהתאם להגדרה הנ"ל, הוכח שאם $T: V \to U$ העתקה לינארית הפיכה, אזי גם $T^{-1}: U \to V$ העתקה לינארית (וגם היא הפיכה: הראה ש $(T^{-1})^{-1}=T$).

1.20 תרגיל. יהא $U \subseteq V$ תת מרחב, יהא W מ"ו ותהא $T: W \to V$ העתקה לינארית.
נגדיר $T^{-1}[U]:=\{w \in W : Tw \in U\}$. הוכח ש $T^{-1}[U]$ תת מרחב של W.

העתקת הנגזרת $D: \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ מוגדרת ע"י:

$$D(a_0+a_1x+a_2x^2+ \dots +a_nx^n) := a_1+2a_2x+ \dots +na_nx^{n-1}.$$

העתקת האינטגרל $S{:}\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}[x]$ מוגדרת ע"י:

$$D(a_0+a_1x+a_2x^2+\ \dots\ +a_nx^n)\ :=\ a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\ \dots\ +\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$$

1.21 תרגיל. יהיו D,S כנ"ל.

א. הוכח ש D,S העתקות לינאריות.

ב. הוכח: $DS=I$, אבל $SD\neq I$.

ג. האם זה שונה מהידוע לך במטריצות? נסה להציע הסבר.

העתקה לינארית הפיכה נקראת **איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים**. בעיקרון, איזומורפיזם היא העתקה ששומרת על מבנה, כך שאפשר לחשוב על שני המבנים ביניהם היא מתאימה כאילו היו אותו מבנה. אם יש איזומורפיזם $T{:}\ V\to U$, אומרים ש V **איזומורפי ל** U (או: U,V איזומורפיים), וכותבים $V\cong U$.

עוד קצת שֵׁמוֹת:

- העתקה לינארית נקראת גם **הומומורפיזם**.
- העתקה לינארית חד–חד ערכית נקראת **מונומורפיזם**.
- העתקה לינארית על נקראת **אפימורפיזם**.

(תגידו, יש לכם גמגומים בסוגריים?)

1.22 תרגיל[0]. נניח ש T היא מונומורפיזם וגם אפימורפיזם. הראה ש T היא איזומורפיזם.

1.23 תרגיל. הוכח שהיחס $V\cong U$ ("V איזומורפי ל U") הוא יחס שקילות.

איזומורפיזם אומר שמבחינה של אלגברה לינארית, המרחבים האיזומורפיים הם "אותו דבר". הם אולי שונים כקבוצות, אבל מבחינת האלגברה הלינארית יש להם בדיוק את אותן התכונות.

התרגיל הבא מראה, שכדי להבין את כל המרחבים הנוצרים סופית, מספיק להבין את הדוגמא הפשוטה ביותר של מרחב נוצר סופית, שהיא $\mathbb{F}^n$.

1.24 תרגיל (איזומורפיזם ההצגה לפי בסיס). יהא V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$. נסמן $n=\dim(V)$, ונקבע בסיס כלשהו B עבור V. הוכח שההעתקה $T{:}\ V\to\mathbb{F}^n$ המוגדרת על ידי $T(v)=[v]_B$ היא איזומורפיזם (בפרט, $V\cong\mathbb{F}^n$).

1.25 תרגיל. יהיו V,W מרחבים וקטוריים מאותו מימד מעל שדה $\mathbb{F}$. הוכח: $V\cong W$.

1.26 תרגיל. הוכח שההעתקה $T{:}\mathbb{F}^{m\times n}\to\mathbb{F}^{n\times m}$ המוגדרת ע"י $T(A)=A^t$ היא איזומורפיזם.

משפט ההגדרה של העתקה לינארית. יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$, יהא $\{v_1,\ \dots\ ,v_n\}$ בסיס עבור V ויהיו $w_1,\ \dots\ ,w_n\in W$ כלשהם (לא בהכרח שונים זה מזה). אזי קיימת העתקה לינארית יחידה

$T:V\to W$, המקיימת $T(v_i)=w_i$. (במילים אחרות, העתקה לינארית נקבעת באופן יחיד ע"י ערכיה על וקטורי הבסיס)

אם נגדיר $T(v_i)=w_i$, אזי T מוגדרת על כל $v\in V$ בצורה הבאה: ניתן להציג את v בצורה יחידה כצירוף לינארי $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n$. אזי $T(v)=T(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n):=\alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T(v_n)$. כיון שאגף ימין מוגדר, גם אגף שמאל מוגדר.

1.27 תרגיל. הראה שההעתקה המתקבלת ממשפט הגדרת ההעתקה היא לינארית, והוכח את משפט ההגדרה של העתקה לינארית.

1.28 תרגיל. נתונה ההעתקה $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת על ידי

$T(1)=x^2;\ T(x)=2x+3;\ T(x^2)=3x$.

חשב את $T(f)$ ואת $T^{-1}(f)$ עבור וקטור כללי $f\in\mathbb{R}_2[x]$.

1.29 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n. הוכח שלכל העתקה לינארית $T:V\to W$ שאינה העתקת האפס יש בסיס B של V עבורו $T(v)\neq 0$ לכל $v\in B$. [רמז: קח וקטור v עבורו $T(v)\neq 0$, והשלם אותו לבסיס B. אם יש $w\in B$ כך ש- $T(w)=0$, החלף אותו בוקטור $v+w$. מדוע זה נשאר בסיס? (תרגיל ישן)]

2 גרעין ותמונה

תהא $T:V\to W$ העתקה לינארית. נגדיר את המרחבים הבאים:

- **הגרעין** של T: $\ker(T):=\{v\in V\ :\ T(v)=0\}$.
- **התמונה** של T: $\mathrm{im}(T):=\{T(v)\ :\ v\in V\}$.

2.1 תרגיל. בהתאם להגדרה הנ"ל, הוכח:

א. $\ker(T)$ הוא תת-מרחב של V.

ב. $\mathrm{im}(T)$ הוא תת-מרחב של W.

2.2 תרגיל. הוכח: $T(v_1)=T(v_2)\ \Leftrightarrow\ v_1-v_2\in\ker(T)$.

2.3 תרגיל. תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכח:

א. $\ker(T)\subseteq\ker(T^2)$.

ב. $\mathrm{im}(T^2)\subseteq\mathrm{im}(T)$.

2.4 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי עם תת-מרחב U.

א. הוכח שיש העתקה לינארית $T:V\to V$ המקיימת $\ker(T)=U$.

ב. הוכח שיש העתקה לינארית $T:V\to V$ המקיימת $\mathrm{im}(T)=U$.

[רמז: קח בסיס עבור U והרחב אותו לבסיס עבור V. היעזר במשפט ההגדרה של ההעתקה]

2.5 תרגיל. הוכח או הפרך: יהיו $S, T: V\to V$ העתקות לינאריות כך ש $\ker(T)=\ker(S)$ וכן $\mathrm{im}(T)=\mathrm{im}(S)$. אזי $T=S$.

2.6 תרגיל. תהא $T: V\to V$ העתקה לינארית. יהא U תת-מרחב של V כך ש $U\cap\ker(T)=\{0\}$. הוכח שאם $v_1, \ldots, v_n\in U$ בת"ל, אזי גם $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ בת"ל.

2.7 תרגיל. תהא $T: V\to V$ העתקה לינארית **אידמפוטנטית** (כלומר $T^2=T$).

א. הוכח או הפרך: $T=I_V$, או $T=-I_V$.

ב. הוכח: $V=\ker(T)\oplus\mathrm{im}(T)$. [רמז: יהא $v\in V$. נניח שהצלחת למצוא את ההצגה הדרושה $v=u+w$. התבונן ב $T(v), T^2(v)$]

2.8 תרגיל. יהיו V מ"ו, ו- $T_1, T_2: V\to V$ העתקות לינאריות המקיימות:

(א) $T_1+T_2=I_V$,

(ב) $T_1T_2=T_2T_1=O$,

(ג) $T_1T_1=T_1$ ו- $T_2T_2=T_2$.

הוכח על סמך נתונים אלו ש $V=\mathrm{im}(T_1)\oplus\mathrm{im}(T_2)$.

2.9 תרגיל. תהא $T: V\to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^2=I$. יהיו $U=\ker(T-I), W=\ker(T+I)$. הוכח: $V=U\oplus W$. [רמז: ראה ברמז של התרגיל הקודם]

תהא $T: V\to W$ העתקה לינארית.

- **הדרגה** של T היא $\mathrm{rank}(T):=\dim(\mathrm{im}(T))$.
- **האפסיות** של T היא $\nu(T):=\dim(\ker(T))$.

2.10 תרגיל. תהא $T: V\to W$ העתקה לינארית. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. $\ker(T)=\{0\}$.

ב. T חד-חד ערכית.

2.11 תרגיל. תהא $T: V\to V$ העתקה לינארית. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. $\ker(T)\neq\{0\}$.

ב. יש העתקה $O\neq S: V\to V$ עבורה $TS=O$.

[רמז: משפט ההגדרה של העתקה לינארית]

2.12 תרגיל*. משפט הדרגה של העתקה לינארית: תהא $T: V\to W$ העתקה לינארית. הוכח: $\nu(T)+\mathrm{rank}(T)=\dim(V)$.

[הדרכה: א. יהא $\{v_1, \ldots, v_k\}$ בסיס עבור $\ker(T)$, ויהא $\{T(u_1), \ldots, T(u_l)\}$ בסיס עבור $\mathrm{im}(T)$.

ב. הראה שהוקטורים $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_l$ בת"ל (הפעל את T על הצירוף הלינארי).

ג. הראה שהוקטורים הנ"ל פורשים את V: לכל $v\in V$,

1. הצג $Tv=\alpha_1T(u_1)+\dots+\alpha_lT(u_l)$.
2. $v-(\alpha_1v_1+\dots+\alpha_lu_l)\in\ker(T)$, ולכן ניתן להציגו כצירוף לינארי של $v_1,\dots,v_k$]

2.13 תרגיל. א. האם יש העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ כך ש $\operatorname{im}(T)=\ker(T)$? [רמז: משפט הדרגה]

ב. מצא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ כך ש $\operatorname{im}(T)=\ker(T)$.

2.14 תרגיל. נגדיר $T:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ ע"י $T(f(x))=f(x+1)-f(x)$.

[א. הוכח ש T העתקה לינארית]

ב. מצא את $\ker(T)$. [רמז: יהא $f(x)=a_kx^k+\dots+a_0$ כך ש $T(f)=0$. הראה שאם $k>0$, אזי $a_k=0$]

ג. מצא את $\operatorname{im}(T)$. [רמז: משפט הדרגה]

2.15 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$. נגדיר $T_A:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ על ידי $T_A(X)=AX-XA$ לכל $X\in\mathbb{R}^{2\times2}$.

א. הוכח ש T_A העתקה לינארית.

ב. תהא $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$. מצא את $\ker(T_A)$ ואת $\operatorname{im}(T_A)$, מצא להם בסיס ובדוק שמתקיים: $\nu(T_A)+\operatorname{rank}(T_A)=\dim(\mathbb{R}^{2\times2})$.

2.16 תרגיל. יהיו V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהא $T:V\to W$ העתקה לינארית. הוכח:

א. אם $\dim(V)<\dim(W)$, אז T אינה על.

ב. אם $\dim(V)>\dim(W)$, אז T אינה חד-חד ערכית.

ג. אם $\dim(V)=\dim(W)$, אז: T חד-חד ערכית $\Leftrightarrow$ T על.

2.17 תרגיל!. הראה בעזרת העתקות לינאריות, שאם מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה משמאל, אז A הפיכה.

הדרכה: נגדיר ה"ל $T:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}^{n\times n}$ ע"י $T(X)=AX$. הוכח ש T חח"ע, ולכן T על. בפרט, יש X כך ש $T(X)=I$ $(AX=)$. לכן $AX=I$, כלומר A הפיכה גם מימין. מדוע זה מספיק?

2.18 תרגיל. תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. $\ker(T^2)=\ker(T)$.

ב. $\operatorname{im}(T)=\operatorname{im}(T^2)$.

ג. $V=\ker(T)\oplus\operatorname{im}(T)$.

[רמז: אוחד התרגילים הקודמים]

2.19 תרגיל!. הוכח את **משפט הדרגה ההפוך**: יהא V מרחב וקטורי ממימד n.

א. יהיו U,W תת-מרחבים של V, כך שמתקיים $\dim(U)+\dim(W)=n$. הוכח שקיימת העתקה לינארית $T:V\to V$ כך ש $\operatorname{im}(T)=U$, וכן $\ker(T)=W$. [רמז: קח בסיס עבור U והשלם אותו לבסיס עבור V. הגדר את ההעתקה על בסיס זה]

ב. הסק שלכל שני מספרים k,m כך ש $k+m=n$ קיימת העתקה לינארית $T:V\to V$ כך ש $\nu(T)=k$ ו $\operatorname{rank}(T)=m$.

2.20 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$. תהא $O\neq T:V\to\mathbb{F}$ העתקה לינארית. הוכח:

א. $\dim(\operatorname{im}(T))=1$.

ב. $\dim(\ker(T))=n-1$.

יהא $v_0\in V$ כך ש $T(v_0)\neq 0$. נסמן $\langle v_0\rangle:=\operatorname{span}\{v_0\}$.

ג. $V=\langle v_0\rangle+\ker(T)$.

ד. אם $\{w_1,\dots,w_{n-1}\}$ בסיס עבור $\ker(T)$, אזי $\{v_0,w_1,\dots,w_{n-1}\}$ בסיס עבור V.

2.21 תרגיל. האם קיימות העתקות לינאריות $T,S:V\to V$ עבורן $\ker(TS)=\{0\}$ אבל $\ker(ST)\neq\{0\}$:

א. כאשר המימד של V סופי?

ב. כאשר המימד של V אינסופי?

2.23 תרגיל*. יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי, ותהא $\varphi:V\to\mathbb{F}$ העתקה לינארית. יהא $v\in V$ כך ש $\varphi(v)\neq 0$. הוכח: $V=\operatorname{span}(v)\oplus\ker(\varphi)$.

הדרכה: א. הראה שהחיתוך של שני המרחבים "ריק".

ב. מצא את המימד של $\ker(\varphi)$.

ג. השתמש במשפט המימדים ובשיקולי מימד לקבל את הדרוש.

2.24 תרגיל. הוכח או הפרך את הטענה הבאה: תהא $T:V\to W$ העתקה לינארית, ויהא $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס עבור V, כך שלכל i מתקיים $T(v_i)\neq 0$. אזי $\ker T=\{0\}$.

3 תת-מרחבים אינוריאנטיים

יהא V מרחב וקטורי, ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. תת-מרחב W של V הוא **אינוריאנטי תחת** T (או: T-**אינוריאנטי**) אם לכל $w\in W$ מתקיים $T(w)\in W$.

עבור קבוצה כלשהי $A\subseteq V$, נסמן $T[A]:=\{T(v)\,:\,v\in A\}$. לפי זה, W T-אינוריאנטי $\Leftrightarrow$ $T[W]\subseteq W$.

3.1 תרגיל. הוכח שלכל מרחב וקטורי V ולכל העתקה לינארית $T:V\to V$, המרחבים $V,\{0\}$ הם T-אינוריאנטיים.

3.2 תרגיל. יהיו V מרחב וקטורי, $T,S:V\to V$ העתקות לינאריות, ו W תת-מרחב T-אינוריאנטי של V.

א. הוכח שאם W גם S-אינוריאנטי, אזי W הוא TS-אינוריאנטי.

ב. נניח ש T הפיכה. האם W הוא T^{-1} אינוריאנטי?

4 סכום ישר של העתקות לינאריות

יהא $V=U\oplus W$ מרחב וקטורי, ויהיו $T:U\to U$ ו $S:W\to W$ העתקות לינאריות. נגדיר העתקה לינארית $T\oplus S:V\to V$ בצורה הבאה: לכל $v=u+w$ (כאשר $u\in U,w\in W$), $(T\oplus S)(u+w):=T(u)+S(w)$.

4.1 תרגיל. הוכח שההעתקה $T\oplus S$ הנ"ל מוגדרת היטב, כלומר:
א. היא מוגדרת לכל $v\in V$.
ב. לכל $v\in V$, $(T\oplus S)(v)$ מוגדר באופן חד משמעי.

4.2 תרגיל. הוכח שבהגדרה לעיל, מתקיים שתת-המרחבים U,W שניהם $T\oplus S$-אינוריאנטים.

5 ההעתקה המצומצמת

תהי $T:V\to U$ ה"ל, ויהא $W\subseteq V$ תת-מרחב. **הצימצום** של T ל W הוא ההעתקה $T|_W:W\to U$ המוגדרת על ידי $T|_W(w):=T(w)$ לכל $w\in W$.

5.1 תרגיל. יהא $V=U\oplus W$, ותהא $T:V\to V$ העתקה לינארית כך שגם U וגם W הם T-אינוריאנטיים. הוכח ש $T|_U\oplus T|_W=T$.

5.2 תרגיל. הוכח:
א. $T|_W$ היא העתקה לינארית.
ב. $\ker(T|_W)=\ker(T)\cap W$.
ג. $\operatorname{im}(T|_W)=T[W]$.
ד. אם $T:V\to V$ ה"ל, ו $W\subseteq V$ תת מרחב אינוריאנטי תחת T, אזי
$$\dim(\ker(T)\cap W)+\dim(T[W])=\dim(W).$$

5.3 תרגיל. יהא $V=U\oplus W$ מרחב וקטורי, ויהיו $T:U\to U$ ו $S:W\to W$ העתקות לינאריות. הוכח:
א. $(T\oplus S)|_U=T$,
ב. $(T\oplus S)|_W=S$.

5.4 תרגיל. נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ע"י $T(x,y)=(3x-y,5y)$. מצא את כל התת-מרחבים $\{0\}\neq U\subsetneq\mathbb{R}^2$ כך ש $\operatorname{im}(T|_U)=U$. [רמז: מהו המימד של U? עבור כל כל התת-מרחבים האפשריים ממימד זה]

6 הצגות של העתקות לינאריות כמטריצות

בסעיף זה נראה שהעתקות לינאריות אינן דבר מופשט כמו שזה עשוי להיראות. למעשה, במובן מסויים כל העתקה לינארית שקולה לכפל במטריצה. תהא $T\colon \underset{\text{בסיס: }E}{V} \to \underset{\text{בסיס: }F}{W}$ העתקה לינארית. נכתוב $E=\{v_1,\ldots,v_n\}$, ו $F=\{w_1,\ldots,w_m\}$. כמו שראינו, T מוגדרת באופן יחיד על ידי הערכים $T(v_1),\ldots,T(v_n)$. לשם נוחיות, נציג אותם לפי הבסיס F ונכתוב אותם בעמודות מטריצה:

$$[T]_F^E := ([T(v_1)]_F,\ldots,[T(v_n)]_F)$$

וקוראים למטריצה הזאת **המטריצה המייצגת את ההעתקה** T **ביחס לבסיסים** E,F. (כמו כן, יש מרצים שמעדיפים לכתוב $[T]_E^F$. אנו בכל אופן נמשיך עם הסימון ש E למעלה) כאשר E,F בסיסים סטנדרטיים, נכתוב פשוט $[T]$ במקום $[T]_F^E$, ונקרא לזה **הצגה סטנדרטית של העתקה לינארית**. אם $T\colon \underset{\text{בסיס: }E}{V} \to \underset{\text{בסיס: }E}{V}$, כותבים $[T]_E$ במקום $[T]_E^E$.

הקשר של המטריצה הזאת להעתקה T מובא בתרגיל הבא.

6.1 תרגיל. א. בהתאם להגדרות הנ"ל, הראה שלכל $v\in V$ מתקיים $[T(v)]_F=[T]_F^E[v]_E$. (במילים אחרות, הפעלת ההעתקה על וקטור שקולה לכפל המטריצה של ההעתקה בוקטור)

ב. הסק שלכל $u,v\in V$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים $[T(\alpha v+\beta u)]_F=\alpha[T]_F^E[v]_E+\beta[T]_F^E[u]_E$. [ראה: תרגיל בנושא הצגת וקטורים לפי בסיס]

ג. הראה שתמיד $[O]_F^E=O$. (כלומר, המטריצה המייצגת את העתקת האפס היא מטריצת האפס)

ד. יהא V מרחב וקטורי, ויהיו E,F בסיסים עבורו. הוכח: $[I_V]_F^E$ היא מטריצת מעבר בין הבסיסים: $[I_V]_F^E[v]_E=[v]_F$. בפרט, לכל בסיס B מתקיים: $[I_V]_B=I$ (כלומר, המטריצה המייצגת את העתקת הזהות היא מטריצת היחידה).

$6.1\frac{1}{2}$ תרגיל. הוכח שלכל מטריצה A מתקיים $[L_A]=A$. (תזכורת: L_A היא ההעתקה הלינארית של כפל משמאל ב A).

6.2 תרגיל. יהיו $V=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}_2[x]$, עם הבסיסים $E=\{(1,2),(3,4)\}$ ו $F=\{1+x^2,x^2-1,x+5\}$ בהתאמה. נגדיר העתקה לינארית $T\colon V\to W$ לפי $T(a,b)=3ax-2bx^2$. מצא, לפי ההגדרה, את $[T]_F^E$.

6.3 תרגיל. יהיו $T,S\colon \underset{\text{בסיס: }E}{V} \to \underset{\text{בסיס: }F}{W}$ העתקות לינאריות. הוכח שלכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים: $[\alpha T+\beta S]_F^E=\alpha[T]_F^E+\beta[S]_F^E$.

6.4 תרגיל. יהיו $T\colon \underset{\text{בסיס: }E}{V} \to \underset{\text{בסיס: }F}{W}$ ו $S\colon W\to \underset{\text{בסיס: }G}{U}$ העתקות לינאריות. הוכח: $[S]_G^F[T]_F^E=[ST]_G^E$.

6.5 תרגיל. תהא $T\colon \underset{\text{בסיס: }E}{V} \to V$ העתקה לינארית, ויהא $f(x)\in\mathbb{F}[x]$. הוכח: $[f(T)]_E=f([T]_E)$.

6.6 תרגיל. תהא $T: V \to W$ ה"ל. ויהיו B_1 בסיס עבור V, ו B_2 בסיס עבור W. הוכח כי T הפיכה (כהעתקה לינארית) $\Leftrightarrow$ המטריצה $[T]_{B2}^{B_1}$ הפיכה (כמטריצה), ומתקיים $[T^{-1}]_{B_1}^{B_2} = \left([T]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$.

6.7 תרגיל. תהא $T: \underset{E\text{ :בסיס}}{V} \to \underset{F\text{ :בסיס}}{W}$ העתקה לינארית. הוכח: $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}([T]_F^E)$. [רמז: הוכחת משפט הדרגה]

6.8 תרגיל*. יהיו $S, T: V \to V$ העתקות לינאריות. הוכח:

א. $\max\{\nu(S), \nu(T)\} \leq \nu(ST)$. [רמז: התבונן בטענה המתאימה עבור דרגה של מטריצות]

ב. $\nu(ST) \leq \nu(T) + \nu(S)$. [רמז: יהיו $X = \ker(S) \cap \operatorname{im}(T) \subseteq W$, $K = \ker(T) \subseteq V$. יהא **2.22 תרגיל**. האם $\{T(v_1), \ldots, T(v_m)\}$ בסיס עבור X, ויהא $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בסיס עבור K. אזי הקבוצה $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_m\}$ פורשת את $\ker(ST)$]

במקום לנסות להבין את המרחבים המופשטים (יחסית) $\operatorname{Hom}(V, W)$, מתברר שמספיק להבין את מרחב המטריצות, כיון שמרחבים אלו איזומורפיים.

6.9 תרגיל (איזומורפיזם ההצגה לפי בסיסים). יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. יהיו $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$. נקבע בסיסים E עבור V ו F עבור W. הוכח שההעתקה $\Psi: \operatorname{Hom}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) \to \mathbb{F}^{m \times n}$ המוגדרת על ידי $\Psi(T) = [T]_F^E$ היא איזומורפיזם.

6.10 תרגיל. יהיו $D: \mathbb{F}_n[x] \to \mathbb{F}_{n-1}[x];\ S: \mathbb{F}_{n-1}[x] \to \mathbb{F}_n[x]$ העתקות הגזירה והאינטגרל. מצא את הצגותיהן לפי הבסיסים הסטנדרטיים: $[D]$, $[S]$.

6.11 תרגיל. תהא $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י $T(x, y) = (2x + y, x + 2y)$.

א. מצא את המטריצה של T^5 ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$.

ב. חשב את $T^5(1, 1)$.

6.12 תרגיל. תהא $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ההעתקה של שיקוף ביחס לציר ה x. מצא בסיס סדור B ל $\mathbb{R}^2$, שעבורו $[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (התשובה אינה יחידה)

הערה למרצה. אם טרם למדתם מטריצות מעבר בין בסיסים, אז כאן המקום לעשות זאת.

התרגיל הבא נותן לנו דרך קלה למצוא במפורש העתקה לינארית המוגדרת על ידי משפט ההגדרה של העתקה לינארית.

6.13 תרגיל. א. יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהא S בסיס סטנדרטי עבור W. יהא $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ בסיס עבור V. תהא $T: V \to W$ ההעתקה הלינארית המוגדרת על ידי $T(b_1) = w_1, \ldots, T(b_n) = w_n$. הוכח:

א. $[T] = ([w_1]_S, \dots, [w_n]_S)\cdot[I]_B^S$. [רמז: מצא את $[T]_S^B$]

ב. לכל $v\in V$ מתקיים $[T(v)]_S = [T][v]_S$.

ג. אם $W=\mathbb{F}^m$, $V=\mathbb{F}^n$, אז $T(v)=[T]\cdot v$ (כלומר, הפעולה של T על וקטור v מתקבלת על ידי כפל המטריצה של T בוקטור).

6.14 תרגיל. א. מצא, בצורה מפורשת, העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ עבורה $\mathrm{im}(T)=\mathrm{span}\{(2,4,5,7),(1,2,1,1)\}$.

ב. מצא, בצורה מפורשת, העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש $\ker(T)=\mathrm{span}\{(1,3,7),(2,5,6)\}$.

ג. מצא, בצורה מפורשת, העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש $\ker(T)=\mathrm{span}\{(1,3,7),(2,5,6)\}$ וכן $\mathrm{im}(T)=\mathrm{span}\{(1,2,3)\}$.

[רמז: השלם את וקטורי הגרעין הנתונים לבסיס, והשתמש במשפט ההגדרה ובתרגיל הקודם]

6.15 תרגיל. מצא, בצורה מפורשת, העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ כך שמתקיים:

$\ker(T) = \mathrm{span}\{1+x, 1+x^2\}$, $\mathrm{im}(T) = \mathrm{span}\{x+x^3, 2x+2x^3\}$.

6.16 תרגיל. יהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ האופרטור הלינארי המוגדר על ידי $T(x,y,z)=(x+y,y+z,2x-2z)$.

א. מצא בסיס לגרעין ולתמונה של T.

ב. מצא בסיס סדור E ל $\mathbb{R}^3$ כך ש $[T]_E^E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&*&*\\0&*&*\end{pmatrix}$. [רמז: השלם את הבסיס של הגרעין לבסיס עבור המרחב]

העתקה לינארית $T:V\to V$ נקראת **נילפוטנטית** אם יש k טבעי כך ש $T^k=O$.

6.17 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n, ותהא $T\in\mathrm{Hom}(V,V)$ העתקה נילפוטנטית, כך ש $T^{n-1}\neq O$.

א. הוכח: $T^n=O$. [רמז: שאלה דומה בנושא מטריצות]

ב. הוכח שקיים $v\in V$ עבורו $\{v, T(v), T^2(v), \dots, T^{n-1}(v)\}$ בסיס עבור V.

ג. מצא את ההצגה של T לפי בסיס זה.

6.18 תרגיל!. [מקור: תקשורת] **אוגר הזזה לינארי:** יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n\in\mathbb{F}$. נגדיר העתקה לינארית $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ בצורה הבאה:

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n\\x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_{n-1}\end{pmatrix}$$

[א. הוכח ש T העתקה לינארית]

ב. הוכח ש T הפיכה $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\neq 0$.

ג. מצא את $[T]$. האם המטריצה שקיבלת מוכרת לך?

6.19 תרגיל. תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית, ויהא U תת-מרחב T-אינוריאנטי של V, שמימדו m. הוכח שיש בסיס B עבורו ההצגה $[T]_B^B$ היא מהצורה $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$, כאשר $A\in\mathbb{F}^{m\times m}$. [רמז: השלם בסיס של U לבסיס של V]

6.20 תרגיל[!]. יהא $V=\underset{\text{בסיס: } E}{U}\oplus\underset{\text{בסיס: } F}{W}$ מרחב וקטורי.

א. יהיו $T:U\to U$ ו $S:W\to W$ העתקות לינאריות. הוכח: $[T\oplus S]_B^B=[T]_E^E\oplus[S]_F^F$.

ב. תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש U וגם W הם T-אינוריאנטיים. הסק: $[T]_B^B=[T|_U]_E^E\oplus[T|_W]_F^F$. [רמז: תרגיל בנושא סכום ישר של העתקות]

ג. השתמש ב(ב) כדי לפתור את סעיף (ב) של שאלה 6.9.

6.21 תרגיל. יהא $V=U\oplus W$ מרחב וקטורי, ויהיו $T:U\to U$ ו $S:W\to W$ העתקות לינאריות. הוכח: $\operatorname{rank}(T\oplus S)=\operatorname{rank}(T)+\operatorname{rank}(S)$, וכן $\nu(T\oplus S)=\nu(T)+\nu(S)$. [רמז: תרגיל קודם]

6.22 תרגיל. תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(2x-y,z+2y)$, ותהא $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י $S(x,y)=(x+y,y+2x)$.

א. מצא את $[T]$ ואת $[S]$.

ב. מצא ישירות את ההעתקה ST, וחשב את $[ST]$. הראה שהתוצאה שווה למכפלת המטריצות $[S]\cdot[T]$.

6.23 תרגיל. יהיו $v_1,\dots,v_k\in V$ בת"ל. נגדיר $K=\{T\in\operatorname{Hom}(V,W)\ :\ v_1,\dots,v_k\in\ker(T)\}$.

א. הוכח ש K תת-מרחב של $\operatorname{Hom}(V,W)$.

ב. מצא את $\dim(K)$. [רמז: הרחב את $v_1,\dots,v_k$ לבסיס עבור V, והסתכל בהצגה של ההעתקות $T\in K$]

6.24 תרגיל. נגדיר $S:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ לפי $S(x,y,z,w):=(2x+y,z-2w,2x+y+2z-4w,4x+2y+z-2w)$. תהא $\mathcal{S}:=\{T\in\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)\ :\ TS=O\}$.

א. מצא את $\ker(S)$.

ב. הוכח ש $\mathcal{S}$ תת-מרחב של $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$.

ג. מצא את $\dim(\mathcal{S})$. [רמז: תרגיל קודם]

6.25 תרגיל. א. יהא V מרחב וקטורי, ויהיו E,F בסיסים שלו. תהא P המטריצה המקיימת $P[v]_E=[v]_F$ לכל $v\in V$.

א. הוכח: $P=[I]_F^E$ (כלומר: ההצגה של העתקת הזהות לפי הבסיסים נותנת את מטריצת המעבר ביניהם). [רמז: אחד התרגילים הקודמים]

ב. תהא $T:\underset{\text{בסיסים: } E,F}{V}\to\underset{\text{בסיסים: } G,H}{W}$ העתקה לינארית. הוכח $[T]_G^F=[I_W]_G^H[T]_H^E[I_V]_E^F$.

6.26 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי עם בסיסים B,E, ותהא $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכח שהמטריצות

$[T]_B$ ו $[T]_E$ דומות. מהי המטריצה P שעבורה $P^{-1}[T]_E P=[T]_B$?

6.27 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ותהא $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^2=-I$, ונתון ש $\dim(V)>1$.

א. הוכח שלכל $v\neq 0$, $v, T(v)$ בת"ל.

ב. נניח ש $\dim(V)=2$. מצא בסיס B עבור V כך ש $[T]_B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. [ראו: (ב)]

ג. נניח שהמטריצה $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$ מאפסת את הפולינום x^2+1. הוכח: $A\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. (מזכיר לכם משהו?)

נשתמש בהערות מהפרק "מטריצות מעבר בין בסיסים" כדי למצוא דרך "טכנית" פשוטה לחשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה לפי בסיסים.

6.28 תרגיל. תהא T ההעתקה המוגדרת בתרגיל 6.2. מצא את $[T]_S^E$ כאשר $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$. מדוע זה יותר קל מתרגיל 6.2?

בתרגיל האחרון ראינו שכאשר S בסיס סטנדרטי, מציאת המטריצה $[T]_S^E$ קלה מאד. נראה איך להשתמש בזה למציאת הצגה כללית $[T]_F^E$.

6.29 תרגיל. יהא W מרחב וקטורי עם בסיס סטנדרטי S. ותהא $T:\underset{E:\text{בסיס}}{V}\to\underset{F=\{w_1,\dots,w_n\}:\text{בסיס}}{W}$ העתקה לינארית. הוכח: $[T]_F^E=([w_1]_S,\dots,[w_n]_S)^{-1}[T]_S^E$.

6.30 תרגיל. נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ע"י $T(a,b)=(2a-3b,a+b)$. יהא S הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$, ויהא $B=\{(1,-2),(3,0)\}$ בסיס אחר.

א. מצא את $[I]_S^B$ ואת $[I]_B^S$.

ב. מצא את המטריצות הבאות: $[T]_B^S, [T]_S^B, [T]=[T]_S, [T]_B$. [ראו: תרגיל קודם]

6.31 תרגיל. תהא T ההעתקה המוגדרת בתרגיל 2.15.

א. מצא את הצגת T לפי הבסיסים הסטנדטיים, $[T]$.

ב. יהא $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. מצא את מטריצת המעבר המתאימה P והיעזר בה לחישוב $[T]_B$.

6.32 תרגיל. נחשוב על $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. יהיו $B=\{1,i\}, B'=\{1+i,1-i\}$ בסיסים של $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{R}$.

תהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ההעתקה המוגדרת ע"י $f(x+iy)=x-iy$.

[א. הוכח ש f לינארית במרחב הנדון]

ב. מצא את $[f]_B, [f]_{B'}, [I]_B^{B'}, [I]_{B'}^B$.

ג. בטא אחת מארבע המטריצות הנ"ל כמכפלה של שלשת האחרות.

ד. מצא שתי מטריצות מבין הארבע שהן דומות זו לזו.

6.33 תרגיל. נגדיר העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ על ידי $T(f):=f''+2f'$. ($f\mapsto f'$ *הינו העתקת הנגזרת*) מצא את $[T]$.

6.34 תרגיל. יהא V_n המרחב הנפרש ע"י הפונקציות $f_k:=t^{k-1}e^t$ $(k=1,\dots,n)$ מעל $\mathbb{R}$. הצג את העתקת הנגזרת לפי הבסיס $\{f_1,\dots,f_n\}$.

פרק ו: דטרמיננטות

1 תמורות

תהא X קבוצה סופית. **תמורה** (**פרמוטציה** permutation) על X היא פונקציה חד-חד ערכית ועל $f{:}X\to X$.

1.1 תרגיל. תהא X קבוצה סופית. ותהא $f{:}X\to X$ פונקציה כלשהי. הוכח: f חד-חד ערכית $\Leftrightarrow$ f על.

אוסף התמורות f על X מסומן S_X.

1.2 תרגיל. יהא $n=\#X$. הוכח: $\#S_X=n!$. [רמז: אינדוקציה על n]

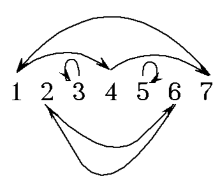
עבור מספר טבעי n, נסמן $[n]:=\{1,2,\dots,n\}$. לשם קיצור, כותבים S_n עבור $S_{[n]}$. יש מספר דרכים לכתוב תמורה $\sigma\in S_n$:

א. רשימה: $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$.

ב. ציור.

ג. פירוק למחזורים זרים: כותבים את כל ה**מסלולים** של σ על אברים $x\in[n]$, כלומר ביטויים מהצורה $(x,\sigma(x),\sigma^2(x),\dots)$ עד שחוזרים ל x.

דוגמא. תמורת ה"ליצן" $\sigma\in S_7$ מיוצגת ע"י הרשימה $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$, או ע"י הציור:



או ע"י הפירוק למחזורים $\sigma=(1,4,7)(2,6)(3)(5)$. לשם קיצור, משמיטים בדרך כלל את המחזורים מאורך אחד, וכותבים $\sigma=(1,4,7)(2,6)$. בכתיבת המחזורים אפשר להתחיל מאיזה נקודה שרוצים, כלומר $(1,4,7)$ ו $(4,7,1)$ וכן $(7,1,4)$ מייצגים את אותו מחזור. אבל $(1,7,4)$ מייצג מחזור אחר.

1.3 תרגיל. הכן רשימה של כל התמורות האפשריות ב S_3, והצג כל אחת מהן בשלש ההצגות האפשריות, כאשר בהצגה של פירוק למחזורים - כתוב את שתי הצורות האפשריות (המלאה, וזאת שאינה כוללת מחזורים מאורך אחד).

התמורה $\mathrm{id}\in S_n$ המקיימת $\mathrm{id}(x)=x$ לכל $x\in[n]$ נקראת **תמורת הזהות**.

הרכבת תמורות $\tau,\sigma\in S_n$ מוגדרת בצורה הרגילה: $(\tau\sigma(x):=\tau(\sigma(x)))$ לכל $x\in[n]$.

הפיכת תמורות. לכל תמורה $\sigma\in S_n$ יש תמורה יחידה $\tau\in S_n$, כך שלכל $\tau\sigma=\sigma\tau=\mathrm{id}$. מסמנים $\tau=\sigma^{-1}$.

1.4 תרגיל. א. הוכח שלכל שתי תמורות $\sigma,\tau\in S_n$, גם $\tau\sigma$ היא תמורה.
ב. הוכח שלכל תמורה $\sigma\in S_n$ מתקיים $\tau\mathrm{id}=\mathrm{id}\tau=\tau$.

1.5 תרגיל[!]. (לחובבי מחשבים) אפשר לייצג תמורה $\sigma\in S_n$ כמערך של n מספרים. למשל, תמורת הליצן הנ"ל תיוצג ע"י המערך $\sigma=[4,6,3,7,5,2,1]$, כאשר $\sigma(i)$ פירושו האיבר היושב במקום i במערך. תהא נתונה תמורה $\sigma\in S_n$ המיוצגת כמערך של n מספרים. התוכנית הבאה מחשבת מערך τ של n מספרים:

```
For i=1 to n do:
      τ(σ(i)) := i
end
```

א. הרץ (ידנית) את התוכנית עבור המקרה $n=7$ כאשר σ היא תמורת הליצן. מהי התמורה המתקבלת τ?
ב. נשנה את שמה של התמורה שקיבלת (τ) ל ξ. הרץ שוב את התוכנית, הפעם עם ξ במקום σ. התוכל לנבא מראש את תוצאת ההרצה?
ב. הכלל את מסקנתך עבור $\sigma\in S_n$ כלשהי.

1.6 תרגיל. א. יהא V מרחב וקטורי עם בסיס (סדור) $B=\{v_1, \dots ,v_n\}$. עבור תמורה $\sigma\in S_n$, נסמן $B_\sigma=\{v_{\sigma(1)}, \dots ,v_{\sigma(n)}\}$ (הפעלת התמורה σ על סדר הוקטורים ב B). יהא $v\in V$. הוכח:
$[v]_B=(\alpha_1, \dots ,\alpha_n) \iff [v]_{B_\sigma}=(\alpha_{\sigma(1)},\alpha_{\sigma(2)}, \dots ,\alpha_{\sigma(n)})$ (במלים: אם משנים את סדר וקטורי הבסיס, אזי סדר הוקטורים בהצגה משתנה בהתאם).
ב. תהא $T:\underset{E\text{ בסיס: }}{V} \to \underset{F\text{ בסיס: }}{W}$ העתקה לינארית. יהיו $\sigma,\tau\in S_n$. הוכח:
$$[T]_{F\sigma}^{E\tau}=([T(v_{\tau(1)})]_{F\sigma},[T(v_{\tau(2)})]_{F\sigma}, \dots ,[T(v_{\tau(n)})]_{F\sigma}).$$
השלם (בזהירות!) את המשפט הבא: $[T]_{F\sigma}^{E\tau}$ היא המטריצה המתקבלת מ $[T]_F^E$ ע"י הפעלת התמורה __ על שורות $[T]$, והתמורה __ על עמודותיה.

1.7 תרגיל[!]. תהא A מטריצה ריבועית סימטרית שכל רכיביה הם 0 או 1. הוכח: A ניתנת לפישוט $\iff$ יש תמורה σ כך ש $[\sigma]A[\sigma^{-1}]$ ניתנת לכתיבה כסכום ישר של שתי מטריצות.

1.8 תרגיל. **הוצאת שורש מתמורות**. (הוכח או הפרך) לכל מספר טבעי n: לכל תמורה $\sigma\in S_n$ יש **שורש**, כלומר תמורה $\tau\in S_n$ כך ש $\sigma=\tau\tau$ (רמז, זה דוג פנדה קטן!).

העתקת התמורה. תהא $\sigma\in S_n$ תמורה. נגדיר העתקה $T_\sigma:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ לפי
$$T_\sigma(x_1, \dots ,x_n):=(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots ,x_{\sigma^{-1}(n)})$$
לכל $x_1, \dots ,x_n\in F$. (במלים: סקלר שיושב במקום i בוקטור עובר למקום $\sigma(i)$)

1.9 תרגיל[!]. א. הוכח שלכל תמורה $\sigma\in S_n$, $T_\sigma:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ היא העתקה לינארית.
ב. תאר את המטריצה $[T_\sigma]$ (הצגת ההעתקה לפי הבסיסים הסטנדרטיים).

תהא $\sigma\in S_n$ תמורה. **היפוך סדר** בתמורה הוא זוג i,j כך ש $i<j$ אבל $\sigma(i)>\sigma(j)$. יהא $h(\sigma)$ מספר היפוכי הסדר של σ. **הסימן** של σ, $\mathrm{sign}(\sigma)$, מוגדר להיות $+1$ אם מספר היפוכי הסדר ב σ זוגי, ו -1 אם הוא איזוגי. במלים אחרות, $\mathrm{sign}(\sigma):=(-1)^{h(\sigma)}$. התמורות עם סימן 1 נקראות **תמורות זוגיות**, והתמורות עם סימן -1 נקראות **תמורות איזוגיות**.

1.10 תרגיל[0]. הוכח: $\mathrm{sign}(\mathrm{id})=1$.

משפט (הוכחה בקורס אחר). א. הסימן של מחזור באורך k הוא $(-1)^{k-1}$.
ב. הסימן של תמורה כללית הוא מכפלת סימני המחזורים שלה.
ג. הסימן של הרכבה של תמורות הוא מכפלת הסימנים של התמורות: $\mathrm{sign}(\sigma\tau)=\mathrm{sign}(\sigma)\cdot\mathrm{sign}(\tau)$.

1.11 תרגיל. מצא את הסימן של כל אחת מהתמורות המופיעות בתרגיל 1.3.

1.12 תרגיל. תהא $\sigma\in S_n$. הוכח: $\mathrm{sign}(\sigma^{-1})=\mathrm{sign}(\sigma)$. [רמז: כל היפוך סדר $i<j \mapsto \sigma(i)>\sigma(j)$ של σ אפשר לקבל היפוך סדר של σ^{-1} בצורה הבאה: נסמן $i':=\sigma(i)$, $j':=\sigma(j)$. מתקיים: $i'>j' \mapsto \sigma^{-1}(i')<\sigma^{-1}(j')$]

2 דטרמיננטות לפי סכום של מכפלות

תהא נתונה מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. כל תמורה $\sigma\in S_n$ בוחרת n מקומות במטריצה:

$$a_{1,\sigma(1)},a_{2,\sigma(2)},\ldots,a_{n,\sigma(n)}$$

דוגמא. נניח ש $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & x \end{pmatrix}$. אזי התמורה $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ בוחרת את המקומות הבאים: $\begin{pmatrix} a & \boxed{b} & c \\ \boxed{d} & e & f \\ g & h & \boxed{x} \end{pmatrix}$.

2.1 תרגיל. א. לפי הסימונים לעיל, הוכח שהמקומות שבוחרת תמורה הם בדיוק איבר אחד מכל שורה (ואיבר אחד מכל עמודה).
ב. הוכח שלכל בחירה של איבר אחד מכל שורה ואיבר אחד מכל עמודה יש תמורה שנותנת את הבחירה הזאת.
ג. לכל אחת מהתמורות מתרגיל 1.3, צייר את המטריצה A הנ"ל וצייר את המקומות שהתמורה בוחרת. בדוק שזה אכן מתאים ל(א) ול(ב).

מסתבר שהדבר הכי מעניין שאפשר לעשות עם המקומות שהתמורה $\sigma\in S_n$ בוחרת במטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הוא לכפול אותם: $a_{1,\sigma(1)}\cdot a_{2,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}$. אם כן, לכל תמורה קיבלנו מספר. עכשיו אנו רוצים מספר שישקלל את כל המספרים האלו ביחד – מעין "ממוצע" שאומר משהו על המטריצה (נראה בהמשך הפרק מה מספר זה אומר על המטריצה). ניקח את הסכום של המספרים האלו, כאשר את המספרים המתקבלים מתמורות זוגיות ניקח ב"פלוס", ואת המספרים המתקבלים מתמורות אי־זוגיות ניקח ב"מינוס" (הוגן, לא?). במלים אחרות, אנו מחשבים את הסכום הבא:

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)}\cdot a_{2,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}$$

למספר שהתקבל קוראים **הדטרמיננטה של** A, ומסמנים אותו $\det(A)$, או: $|A|$. (ההגדרה הזאת נקראת **סכום של מכפלות**)

2.2 תרגיל[0]. הוכח:

$$\det(A)=\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \text{זוגית}}}a_{1,\sigma(1)}\cdot a_{2,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}-\sum_{\substack{\tau\in S_n\\ \text{אי־זוגית}}}a_{1,\tau(1)}\cdot a_{2,\tau(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\tau(n)}$$

2.3 תרגיל. היעזר בתרגילים קודמים לחשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:
$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}$.

2.4 תרגיל[!]. א. היעזר בתרגילים קודמים לחשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

(1) מטריצה "סיבובית" כללית 3×3 <u>מעל $\mathbb{Z}_3$</u>: $\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$ ($a,b,c\in\mathbb{Z}_3$).

(2) המטריצה $A-xI$, כאשר $A=\begin{pmatrix}2&-4&-3\\-1&-1&2\\0&0&-4\end{pmatrix}$ <u>מעל $\mathbb{R}$</u>.

ב. הוכח שהתוצאה שקיבלת בחלק (1) שווה ל $a+b+c$. [רמז: משפט פרמה הקטן]

ג. בחלק (2) קיבלת פולינום $f(x)$. בדוק שפולינום זה מאפס את A (כלומר $f(A)=O$).

2.5 תרגיל. חשב בעזרת התרגילים הקודמים:

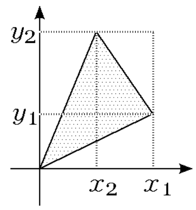
א. את הדטרמיננטה של מטריצה כללית $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{2\times 2}$.

ב. את הדטרמיננטה של מטריצה כללית $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&x\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{3\times 3}$.

2.6 תרגיל. א. תהא $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$. הוכח: A הפיכה $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$. [רמז: תרגיל בנושא הפיכת מטריצות]

ב. בדוק אילו מהמטריצות הבאות הפיכות: $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}a&b\\a&b\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$ (כאשר $ab\neq 0$).

2.7 תרגיל!. **שטח משולש במישור**: א. נתון משולש שקודקודיו הם $\vec{0}=(0,0), v_1=(x_1,y_1), v_2=(x_2,y_2)$.



הוכח ששטח המשולש שווה ל $\frac{1}{2}\cdot\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}\right|$. [רמז: אפשר לקבל את שטח המשולש ע"י חיסור שטחי המשולשים הריקים (קל למצוא) משטח הריבוע (שגם אותו קל למצוא)]

ב. הכלל את התוצאה עבור משולש כלשהו במישור: אם הקודקודים הם $v_1=(x_1,y_1), v_2=(x_2,y_2)$ ו $v_3=(x_3,y_3)$, אזי שטח המשולש הוא:

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\det\begin{pmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{pmatrix}\right|$$

[רמז: בצע הזזה של המישור $v\mapsto v-v_1$, כך שהקודקוד v_1 עובר לראשית (מדוע השטח אינו משתנה?). כעת השתמש ב(א)]

2.8 תרגיל. איך מחשבים שטח של מקבילית במישור בעזרת דטרמיננטות?

כזכור, לכל מטריצה $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ אפשר להגדיר העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ע"י $T(v)=Av$.

2.9 תרגיל. תהא $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ כנ"ל.

א. הוכח: אם $M\subseteq\mathbb{R}^2$ היא מקבילית, אזי גם $T[M]\subseteq\mathbb{R}^2$ מקבילית (במילים: T מעבירה מקביליות למקביליות).

הדרכה: א. לכל שתי נקודות $v,w\in\mathbb{R}^2$, הישר המחבר אותן מורכב מהנקודות $\{tv+(1-t)w : 0\leq t\leq 1\}$. הראה שהישר $\overline{uw}$ עובר תחת T לישר $\overline{(Tu)(Tw)}$.

ב. כעת התבונן על המקבילית כמורכבת מאוסף ישרים מקבילים, ובדוק לאילו ישרים הם עוברים.

ג. הוכח שהצורה שבטווח אף היא מקבילית.

ב. **השפעת כפל במטריצה על השטח.** נסמן ב S_M שטח של מקבילית $M\subseteq\mathbb{R}^2$. תהא M מקבילית ב $\mathbb{R}^2$.
הוכח: $S_{T[M]}=|A|\cdot S_M$. (במילים: "שטח של המקבילית המתקבלת מהכפלת A במקבילית הנתונה" = "$|A|$ כפול שטח המקבילית הנתונה")

הרב יהודה בן ברזילי הברצלוני (ראשית המאה הי"א) העיר בפירושו על "ספר יצירה" (ספר קבלי קדום), שניתן למצוא את השטח של כל צורה במשולשים שגודלם הולך וקטן. הדבר נכון גם לגבי מקביליות. לכן, התרגיל האחרון מוכיח שלכל צורה במישור, השטח של התמונה תחת כפל במטריצה משתנה לפי הדטרמיננטה.

2.10 תרגיל. הוכח שלכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $|A|=|A^t|$. [רמז: $\Pi_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}=\Pi_{j=1}^{n}a_{j,\sigma^{-1}(j)}$. חשב את $|A^t|$ והשתמש בכך ש $\operatorname{sign}(\sigma)=\operatorname{sign}(\sigma^{-1})$]

מהתרגיל האחרון נובע, שאם יש משפט על דטרמיננטה שמדבר על שורות המטריצה, אזי ניתן להמיר אותו למשפט שמדבר על עמודות המטריצה.

2.11 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח בעזרת ההגדרה של סכום מכפלות:

א. אם יש ב A שורת/עמודת אפסים, אזי $|A|=0$.

ב. אם A משולשית, אזי $|A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$. [רמז: הוכח שכל תמורה σ מקיימת $n\le\sigma(n)$ לכל n, ולכן $\sigma=id$ – הראה שכל מחזור בהצגת המחזורים של σ הוא מאורך 1]

2.12 תרגיל[!]. **דטרמיננטות של מטריצות בלוקים**.

א. יהיו $A\in\mathbb{F}^{n\times n},B\in\mathbb{F}^{m\times m}$. הוכח: $|A\oplus B|=|A|\cdot|B|$.

ב. (הכללה של (ג)) יהיו $A\in\mathbb{F}^{n\times n},B\in\mathbb{F}^{m\times n},C\in\mathbb{F}^{m\times m}$, הוכח: $\det\begin{pmatrix}A & O\\ B & C\end{pmatrix}=|A|\cdot|C|$.

ג. בהנחות הנ"ל, הוכח: $\det\begin{pmatrix}A & O\\ B & C\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A^t & O\\ B & C^t\end{pmatrix}$.

ד. יהיו A,B,C כנ"ל, ו $D\in\mathbb{F}^{n\times m}$. הוכח או הפרך: $\det\begin{pmatrix}A & D\\ B & C\end{pmatrix}=|A|\cdot|C|-|D|\cdot|B|$.

ה. חשב את הדטרמיננטה הבאה: $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 0 & 6 & 8\\ 3 & 4 & 3 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5\end{vmatrix}$. [רמז: (ג)]

2.13 תרגיל. הוכח (בעזרת ההגדרה של סכום מכפלות) שאם $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקבלת מ A על ידי:

א. הכפלת שורה/עמודה של A בסקלר $\alpha\in\mathbb{F}$, אזי $|B|=\alpha|A|$.

ב. החלפת שתי שורות/עמודות של A, אזי $|B|=-|A|$. [רמז: לכל מכפלה ב B, אפשר לקבל את אותה מכפלה גם עם סימן הפוך ב A]

ג*. פעולה מהצורה $R_i+\alpha R_j$ (או $C_i+\alpha C_j$), אזי $|B|=|A|$. [רמז: הרעיון דומה ל(ב), אולם שכאן רואים שהתוספת למכפלה מופיעה פעמיים בסימנים הפוכים ולכן מתבטלת]

2.14 תרגיל. היעזר בתרגיל הקודם למצוא את הדטרמיננטה של מטריצה עם שתי שורות/עמודות שוות.

2.15 תרגיל. א. הוכח (בעזרת הגדרת הדטרמיננטה כסכום של מכפלות), שלכל מטריצה ריבועית A ולכל סקלר $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $|\alpha A|=\alpha^n|A|$.

ב. הוכח שלכל מטריצה A מעל $\mathbb{C}$ עם דטרמיננטה שונה מאפס, קיים סקלר $c\in\mathbb{C}$ כך ש $|cA|=1$. [רמז: המשפט היסודי של האלגברה]

2.16 תרגיל. יהא n איזוגי, ותהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה אנטיסימטרית (כלומר $A^t=-A$).

א. הוכח שאם $\mathrm{char}(\mathbb{F})\neq 2$, אזי $|A|=0$.

ב. האם (א) נכון גם כאשר $\mathrm{char}(\mathbb{F})=2$?

3 פיתוח דטרמיננטה לפי שורה/עמודה

תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה. **המינור ה i,j של** A הוא המטריצה $A_{ij}\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ המתקבלת מ A ע״י מחיקת שורה i ועמודה j.

משפט. א. **פיתוח לפי שורה** i: $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$.

ב. **פיתוח לפי עמודה** j: $|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$.

3.1 תרגיל. הסק את המשפט על פיתוח לפי עמודה מהמשפט על פיתוח לפי שורה. [ראו: תרגיל קודם]

3.2 תרגיל*. הוכח את המשפט על פיתוח לפי שורה.

לחילופין, ראו הוכחה ב www.cs.biu.ac.il/~tsaban/LinearAlgebra/Minors.pdf

3.3 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: אם $k\neq i$, אז $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}|A_{ij}|=0$. [ראו: תהא B המטריצה שכל שורותיה שוות לשורות A, פרט לשורה i ששווה לשורה k של A (כלומר שורה k של A מופיעה פעמיים ב B: בשורה i ובשורה k). הראו שהסכום הנ״ל שווה ל $|B|$]

3.4 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח בעזרת פיתוח לפי שורה/עמודה:

א. אם יש ב A שורת/עמודת אפסים, אזי $|A|=0$.

ב. אם A משולשית, אזי $|A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$. (בפרט, $|I|=1$)

4 חישוב בעזרת פעולות שורה/עמודה אלמנטריות

4.1 תרגיל. הוכח (בעזרת פיתוח לפי שורה/עמודה) שאם $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקבלת מ A על ידי:

א. הכפלת שורה/עמודה של A בסקלר $\alpha\in\mathbb{F}$, אזי $|B|=\alpha|A|$.

ב. החלפת שתי שורות/עמודות של A, אזי $|B|=-|A|$. הסק שאם ב A שתי שורות/עמודות זהות, אזי $|A|=0$.

ג. פעולה מהצורה $R_i+\alpha R_j$ (או $C_i+\alpha C_j$), אזי $|B|=|A|$. [ראו: פתח את שורה i, והיעזר בתרגיל 3.3 וב(ב)]

4.2 תרגיל. עזרו לדני למצוא את הדטרמיננטה: דני, סטודנט למתמטיקה בתחילת דרכו, חשב (לאחר שפתר את התרגיל הקודם) על שיטה מעניינת לחישוב דטרמיננטה. הוא ידרג את המטריצה לצורה משולשית וימצא את הדטרמיננטה של המטריצה המשולשית. לאחר מכן, הוא ״יתקן״ את התוצאה בצורה הבאה: כל החלפת שורות שביצע בתהליך הדרוג תכפול את הדטרמיננטה ב (-1), וכל כפל שורה בסקלר α

יכפול את הדטרמיננטה באותו מספר. הוא חישב את הדטרמיננה של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix}2&4&8\\4&8&20\\3&3&9\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftarrow\frac{1}{2}R_1}\begin{pmatrix}1&2&4\\4&8&20\\3&3&9\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-4R_1}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&0&4\\3&3&9\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-3R_1}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&0&4\\0&-3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-3&-3\\0&0&4\end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה של המטריצה המשולשית הזו היא $1\cdot(-3)\cdot 4=-12$. יש כאן פעולה אחת של החלפת שורות, לכן הכפיל ב -1 לקבל: 12. יש גם פעולה אחת של כפל שורה בסקלר $\frac{1}{2}$, לכן הכפיל את התוצאה ב $\frac{1}{2}$ וקיבל שהדטרמיננטה היא 6. להפתעתו, ראה דני שבחוברת הפתרונות כתוב 24! איפה טעה דני?

4.3 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, כך שלכל i,j מתקיים $a_{ij}\in\{1,-1\}$. הוכח ש 2^{n-1} מחלק את $\det(A)$ (כלומר, יש $k\in\mathbb{Z}$ כך ש $\det(A)=k\cdot 2^{n-1}$).

4.4 תרגיל[!]. נתונים חמישה מספרים בני חמש ספרות, כולם מתחלקים ב 17 (תאמינו לי): 12342, 21029, 36601, 47277, 52292. נרכיב מטריצה $A\in\mathbb{R}^{5\times 5}$, שבכל רכיב שלה תופיע ספרה אחת:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&2\\2&1&0&2&9\\3&6&6&0&1\\4&7&2&7&7\\5&2&2&9&2\end{pmatrix}$$

הוכח: $17|\det(A)$. [רמז: אין צורך לחשב את הדטרמיננטה!]

5 כפליות הדטרמיננטה

תזכורת: מטריצת שורה/עמודה אלמנטרית היא מטריצה מהצורה $\rho(I)$, כאשר ρ פעולת שורה/עמודה אלמנטרית (כלומר אחת הפעולות המופיעות בתרגיל 2.13).

5.1 תרגיל. תהא ρ פעולת שורה/עמודה אלמנטרית. הוכח: לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $|\rho(A)|=|\rho(I)|\cdot|A|$.
[רמז: תרגיל קודם, ותכונה בסיסית של הפעולה ρ]

5.2 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: A הפיכה $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$. [רמז: אפשר להביא את A לצורה מדורגת קנונית על ידי סדרה סופית של פעולות אלמנטריות. הבחן בין המקרה ש A הפיכה למקרה שאינה הפיכה, והיעזר בתרגיל הקודם]

5.3 תרגיל. א. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ותהא E מטריצת שורה אלמנטרית. הוכח: $|EA|=|E|\cdot|A|$.

ב. הוכח שלכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $|AB|=|A|\cdot|B|$.

ג. בעזרת (ב), ספק הוכחות קצרות לטענות הבאות לגבי מטריצות ריבועיות:

- A הפיכה אם ורק אם $|A|\neq 0$.
- AB הפיכה אם ורק אם A,B שתיהן הפיכות.

5.4 תרגיל. יהיו $\tau,\sigma\in S_n$. הוכח:

א. $\det([T_\sigma])=\operatorname{sign}(\sigma)$.

ב. $[T_{\tau\sigma}]=[T_\tau]\cdot[T_\sigma]$.

ג. הראה בעזרת (ב): $\operatorname{sign}(\tau\sigma)=\operatorname{sign}(\tau)\cdot\operatorname{sign}(\sigma)$.

ב. הראה בעזרת (ג): $\operatorname{sign}(\sigma^{-1})=\operatorname{sign}(\sigma)$.

5.5 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח:

א. לכל k טבעי מתקיים $|A^k|=|A|^k$.

ב. אם A הפיכה, אזי $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

ג. אם A הפיכה, אזי לכל k טבעי מתקיים $|A^{-k}|=|A|^{-k}$.

5.6 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. חשב את $|A^{123456789}|$ בצורה יעילה. [רמז: זה קל מאוד]

5.7 תרגיל. הוכח שאם $A\sim B$, אזי $|A|=|B|$. (במילים: למטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה)

כזכור, עבור מטריצה $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ הגדרנו את המטריצה A^* ע״י $A^*=\overline{A^t}$, כלומר $(A^*)_{ij}=\bar{a}_{ji}$. אם מתקיים $AA^*=I$, נאמר ש A **אוניטרית**.

5.8 תרגיל. א. נניח ש $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $AA^t=I$. מהם הערכים האפשריים עבור $|A|$?

ב. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה אוניטרית. מהן האפשרויות עבור $|A|$?

5.9 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^k=I$. מצא את הערכים האפשריים עבור $|A|$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

ב. $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

ג. $\mathbb{F}=\mathbb{Z}_p$. [רמז: התבונן במקרה $k=p$, והשתמש במשפט פרמה הקטן]

6 השוואת השיטות

כבר אמרנו שדרוג מטריצה דורש כ n^3 פעולות בסיסיות.

6.1 תרגיל. מהו בקירוב מספר הפעולות הבסיסיות לחישוב דטרמיננטה של מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לפי:

א. סכום של מכפלות.

ב. פיתוח לפי שורה/עמודה.

6.2 תרגיל. לאור התרגיל הקודם, מהו ה n הקטן ביותר שממנו ואילך עדיף לחשב דטרמיננטה של $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לפי דרוג?

בכל אופן, עבור n–ים קטנים אין זה משנה איזו שיטה בוחרים, ולמעשה בדרך כלל משלבים את שיטת הדרוג עם שיטת הפיתוח לפי שורה/עמודה (מאוד משתלם לפתח לפי שורה/עמודה שיש בה הרבה אפסים. לכן כשמדרגים, צריך לחפש דרך לאפס את רובה של אחת השורות/העמודות).

6.3 תרגיל[!]. **פאזל מאה חלקים**. חשב את הדטרמיננטה הבאה:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 10\\
3 & 4 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24\\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 28\\
0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 0 & 25 & 30\\
0 & 0 & 0 & 12 & 10 & 6 & 0 & 0 & 24 & 30\\
0 & 0 & 0 & 16 & 15 & 2 & 7 & 0 & 21 & 28\\
0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 18 & 14 & 8 & 16 & 24\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0\\
2 & 2 & 0 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18
\end{vmatrix}$$

[רמז: פתח בכל שלב לפי העמודה/שורה הכי משתלמת]

7 דטרמיננטה של מטריצות $n\times n$ מיוחדות

7.1 תרגיל. א. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה: $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & b & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & \ddots & a & b\\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$

ב. תהא $\in\mathbb{F}^{n\times n}$ $A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & & b\\ b & a & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & b\\ b & \cdots & & b & a \end{pmatrix}$ מתי A הפיכה? הוכח!

7.2 תרגיל. חשב את הדטרמיננטה הבאה מעל $\mathbb{R}$: $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & & \iddots & 0\\ 0 & \iddots & & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

נקבע מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ונתבונן במטריצה $A-xI$. הדטרמיננטה $|A-xI|$ נקראת **הפולינום האופייני של** A.

7.3 תרגיל. חשב את הפולינום האופייני של המטריצה

$$\text{companion}(a_0, \dots, a_{n-1}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

[רמז: מצא נוסחת נסיגה, ובדוק מה היא אומרת עבור $n=2,3$. הכלל אותה ל n כללי]

יהיו $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$. המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^{n-1} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נקראת **מטריצת וַנְדֶרְמוֹנְדֶה**.

7.4 תרגיל. א. חשב את הדטרמיננטה של מטריצת ונדרמונדה הנ"ל.

[הדרכה: א. בצע $C_i \leftarrow C_i - a_1 C_{i-1}$ עבור $i=n$, אח"כ עבור $i=n-1, n-2, \dots, 2, 1$.

ב. פתח לפי השורה הראשונה, באינדוקציה.

ג. מכל שורה i הוצא את הגורם $a_i - a_1$]

ב. מתי מטריצת ונדרמונדה הפיכה?

8 דטרמיננטה של העתקה לינארית

יהא V מרחב וקטורי עם בסיס B, ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. **הדטרמיננטה של ההעתקה הלינארית** T מוגדרת ע"י $\det(T) = \det([T]_B)$.

8.1 תרגיל. יהיו $T, S: V \to V$ העתקות לינאריות. הוכח:

א. $\det(T)$ אינה תלויה בבסיס שנבחר (כלומר כל בסיס יתן אותה דטרמיננטה). [רמז: תרגיל מספר 5]

ב. T העתקה הפיכה $\Leftrightarrow$ $\det(T) \neq 0$.

ג. $\det(ST) = \det(S) \cdot \det(T)$.

8.2 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ותהא $T: V \to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^2 = -I$. הוכח ש $\dim(V)$ זוגי. [רמז: התבונן ב $\det(T^2)$]

9 המטריצה הנלוית (Adjoint)

תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ **המטריצה הנלוית** $B = \text{adj}(A) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מוגדרת ע"י $b_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$. נשים לב שאלו הם המקדמים של a_{ji} בחישוב הדטרמיננטה של A לפי שורה/עמודה.

9.1 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: $\mathrm{adj}(A^t)=\mathrm{adj}(A)^t$.

9.2 תרגיל. בהתאם לסימונים הנ"ל, הוכח: $A\cdot\mathrm{adj}(A)=\mathrm{adj}(A)\cdot A=|A|I$.

הדרכה: נסמן $C=A\cdot\mathrm{adj}(A)$.

א. הראה שלכל i, c_{ii} מתקבל ע"י פיתוח $|A|$ לפי שורה i. לכן $c_{ii}=|A|$ לכל i.

ב. הראה שכאשר $i\neq j$, c_{ij} מתקבל ע"י פיתוח לפי שורה i של מטריצה שבה שורה j שווה לשורה i (ראה תרגיל 3.3), ולכן $c_{ij}=0$ (ראה תרגיל מס' 4).

ג. הסבר מדוע הוכחה דומה עובדת עבור המכפלה $\mathrm{adj}(A)\cdot A$.

9.6 תרגיל. א. הוכח שאם A הפיכה, אזי $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\mathrm{adj}(A)$.

ב. הוכח שבמקרה של מטריצות 2×2, הנוסחה ב(א) מתאימה לנוסחה המוכרת לך.

ג. היעזר ב(א) לתאר שיטה להפיכת מטריצה 3×3.

9.3 תרגיל. א. הוכח שכל מטריצה ריבועית A: $A,\mathrm{adj}(A)$ הן מטריצות מתחלפות.

ב. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: A הפיכה $\Leftrightarrow A\cdot\mathrm{adj}(A)\neq O$.

9.4 תרגיל. יהיו $\in\mathbb{R}^{4\times4}$ $A=\begin{pmatrix}2&0&-1&0\\5&0&0&8\\0&-3&0&2\\0&1&2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\-1&1&2&0\\0&-1&1&2\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$.

א. חשב את $\mathrm{adj}(A)$ ואת $\mathrm{adj}(B)$.

ב. מצא את $|AB|$. (בקלות!)

9.5 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix}b&a&a\\a&b&a\\a&a&b\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3^{3\times3}$.

א. חשב את $\mathrm{adj}(A)$.

ב. הראה בעזרת (א), ש $|A|=b-a$, והשווה לתוצאה מתרגיל 9.3.

9.7 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix}z&\overline{z}&|z|\\\overline{z}&z&|z|\\\frac{1}{|z|}&\frac{1}{|z|}&1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times3}$.

א. מצא את $\mathrm{adj}(A)$ ואת $|A|$.

ב. לאילו ערכים של z המטריצה הפיכה?

ג. מצא את A^{-1} בעזרת (א).

9.8 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&a_1\\0&\ddots&\ddots&.&a_2\\.&\ddots&\ddots&.&.\\.&&\ddots&0&.\\0&\cdots&0&1&a_n\end{pmatrix}$. מצא את A^{-1} בעזרת דטרמיננטות.

9.9 תרגיל. א. הוכח שלכל מטריצה משולשית עליונה/תחתונה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, גם המטריצה $\mathrm{adj}(A)$ משולשית עליונה/תחתונה.

ב. הוכח שלכל מטריצה אלכסונית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, גם המטריצה $\mathrm{adj}(A)$ אלכסונית.

9.10 תרגיל[!]. תהא $A\in\mathbb{Q}^{n\times n}$. בפרט $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. נתון כי A הפיכה ב $\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכח ש A הפיכה ב $\mathbb{Q}^{n\times n}$ (כלומר יש $B\in\mathbb{Q}^{n\times n}$ כך ש $AB=BA=I$).

9.11 תרגיל. הוכח שאם סכום אברי כל שורה וכן סכום אברי כל עמודה ב A הוא אפס (כלומר: A היא ריבוע קסם עם סכום אפס), אזי קיים $\alpha\in\mathbb{F}$ עבורו: $\mathrm{adj}(A)=\alpha\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$. (במלים אחרות, כל המינורים $(-1)^{i+j}|A_{ji}|$ של A שווים זה לזה)

הדרכה: א. תהא B המטריצה המתקבלת מ A ע"י החלפת שורה i בוקטור שכולו אפסים, פרט למקום k (בו כתוב 1) ומקום j (בו כתוב -1). הוכח: סכום עמודות B הוא אפס, לכן $|B|=0$.

ב. פתח את B לפי שורה i, לקבל $|A_{ij}|(-1)^{i+j}=(-1)^{i+k}|A_{ik}|$ (לכל i,j,k).

ג. בצע טריק דומה עם עמודות A לקבל $|A_{kj}|(-1)^{k+j}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ (לכל i,k,j).

9.12 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ $(2<n)$.

א. הוכח שלכל $\alpha\in\mathbb{F}$, $\mathrm{adj}(\alpha A)=\alpha^{n-1}\mathrm{adj}(A)$.

ב. הוכח שלכל A הפיכה מתקיים $|\mathrm{adj}(A)|=|A|^{n-1}$.

ג. יהא $3\le n$. הוכח שלכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה, $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A))=|A|^{n-2}A$.

[ד*. הראה שגם עבור A סינגולרית הטענה נכונה]

הדרגה הדטרמיננטית של מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ היא מספר השורות בתת-המטריצה הגדולה ביותר של A (המתקבלת ע״י מחיקת שורות ועמודות מ A) שהדטרמיננטה שלה שונה מאפס.

9.13 תרגיל. מצא את הדרגה הדטרמיננטית של המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

9.14 תרגיל*. הוכח שהדרגה הדטרמיננטית של מטריצה שווה לדרגה (דרגת שורות/עמודות) שלה.

10 נוסחת קרמר

נוסחת קרמר היא נוסחה פשוטה ושימושית למציאת מספר קטן של משתנים במערכת משוואות לינאריות מרובת משתנים. מדי פעם הופצה שמועה ש"קראר" הוא שם משפחתו של הגר"א (הגאון רבי אליהו מוילנא), ושנוסחת קראר היא של הגר"א. שמועה זאת אינה נכונה: הנוסחה נמצאה ע"י מתמטיקאי שוויצרי בשם גבריאל קראר

(1704–1752). נחזור לעניינו.
את משפט קרמר תפגשו בתרגיל הבא:

10.1 תרגיל. נתונה מערכת משוואות $Ax=b$, כאשר $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $|A|\neq 0$. לכל i, נגדיר מטריצה A_i השווה למטריצה A בכל העמודות, פרט לעמודה i שבמקומה כתוב הוקטור b. הוכח שפתרון המערכת הוא: $x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\ x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\ \dots,\ x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$. [רמז: A הפיכה, לכן $|A|\neq 0$. כעת, $x_i=|(e_1,\dots,e_{i-1},x,e_{i+1},\dots,e_n)|=|A^{-1}A_i|=|A|^{-1}\cdot|A_i|$ (את השוויון השני הוכח בעזרת כפל A^{-1} בעמודות A_i]

מקובל לסמן $\Delta_i:=|A_i|$ לכל i, ו $\Delta:=|A|$. היתרון בנוסחת קרמר הוא, שאם אנו מעוניינים רק ב x_3, למשל, אין צורך למצוא את שאר המשתנים, אלא מחשבים ישירות $x_3=\Delta_3/\Delta$.

10.2 תרגיל. נתון ש- a,b,c,d שונים זה מזה, ונתונה המערכת: $\begin{cases} x+y+z+w &=& 1\\ ax+by+cz+dw &=& \alpha\\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2w &=& \alpha^2\\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3w &=& \alpha^3\end{cases}$. מצא את x ואת z. [רמז: דטרמיננטה של ונדרמונדה]

אפשר להשתמש בנוסחת קרמר גם כדי לפתור מערכת שבה המטריצה מלבנית. הופכים חלק מהמשתנים לפרמטרים ומעבירים לאגף ימין, כך שמתקבלת מערכת (פרמטרית) עם מטריצה ריבועית. למשל:

$$\begin{cases} ax+by &=& d-cz\\ ex+hy &=& m-kz\end{cases} \Leftarrow \begin{cases} ax+by+cz &=& d\\ ex+hy+kz &=& m\end{cases}$$

אם המטריצה הריבועית ($\begin{pmatrix} a & b\\ e & h\end{pmatrix}$ בדוגמא) אינה הפיכה, זה אומר שהפכנו את המשתנים הלא נכונים לפרמטרים. נחזיר חלק מהם לאגף שמאל, ונעביר במקומם משתנים אחרים, ונבדוק שוב אם המערכת אינה הפיכה. למשל בדוגמא, אם $\begin{pmatrix} a & c\\ e & k\end{pmatrix}$ הפיכה, נהפוך את y (במקום z) לפרמטר. הערה: לא תמיד נמצא מקרה שבו הריבוע שיישאר הפיך, אבל במקרים מעשיים זה מספיק.

10.3 תרגיל. פתור בעזרת נוסחת קרמר את המערכת הבאה: $\begin{cases} x-2y+z+w &=& 1\\ x-y+5z-w &=& 5\end{cases}$.

פרק ז: וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

1 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, ויהא $0\neq v\in V$. אם יש סקלר $\lambda\in\mathbb{F}$ עבורו $T(v)=\lambda v$, נאמר ש v **וקטור עצמי של** T ו λ **ערך עצמי של** T. (אגב, יש הרבה שמות ל"ערך עצמי" באנגלית: כמעט כל צירוף של שני ביטויים, כאשר הראשון הוא מהקבוצה {eigen, proper, latent, characteristic, secular} והשני מהקבוצה {value, root, number} שימש מתישהו לציין ערך עצמי)

1.1 תרגיל. מדוע, לדעתך, וקטור האפס לא נחשב לוקטור עצמי? [רמז: אחרת כל ערך היה ערך עצמי]

1.2 תרגיל. מצא (ישירות לפי ההגדרה) את כל הוקטורים העצמיים של ההעתקה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T(x,y)=(y,x)$.

1.3 תרגיל[!]. [בדיחה] תלמיד אחד אמר, ש"ערך עצמי של מטריצה" פירושו האופן שבו המטריצה מעריכה את עצמה. ברוח זו, הוכח את הטענה הבאה: לכל מטריצה שדרגתה נמוכה יש ערך עצמי אפס. (נאמר שדרגת מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ היא **נמוכה**, אם הדרגה שלה קטנה מ n, כלומר $\text{rank}(A)<n$).

עבור $\lambda\in\mathbb{F}$, מגדירים את **המרחב העצמי** $V_\lambda:=\{v\in V : T(v)=\lambda v\}$.

1.4 תרגיל. א. הראה (או בעזרת (ב)) ש V_λ תת-מרחב של V.

ב. הוכח: $V_\lambda=\ker(T-\lambda I)$. (זה נותן הוכחה אחרת ל(א))

ג. הראה ש $U_\lambda:=\{v : \lambda$ המתאים לערך עצמי T וקטור עצמי של $v\}$ אינו תת-מרחב של V. מה ההבדל בין U_λ ל V_λ?

ד. מהו V_λ כאשר λ אינו ערך עצמי של T?

1.5 תרגיל. תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. λ ערך עצמי של T.

ב. ההעתקה $T-\lambda I$ אינה חד-חד ערכית.

ג. ההעתקה $T-\lambda I$ אינה על.

ד. $\det(T-\lambda I)=0$.

[רמז: תרגיל קודם]

ערך עצמי של מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדר בצורה דומה: $0\neq v\in V$ וקטור עצמי של A אם $Av=\lambda v$ (ואז λ הוא ערך עצמי של A). **המרחב העצמי** של מטריצה מוגדר בדומה למרחב העצמי של העתקה לינארית.

1.6 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

א. מצא את הערכים העצמיים של A. [רמז: בעזרת דטרמיננטה]

ב. מצא את המרחבים העצמיים של A.

1.7 תרגיל. הוכח שלמטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ אין ערכים עצמיים.

1.8 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ותהא ρ פעולת שורה/עמודה אלמנטרית. הוכח או הפרך:

א. ל A ול $\rho(A)$ יש אותם ערכים עצמיים.

ב. ל A ול $\rho(A)$ יש אותם מרחבים עצמיים.

הדרכה: עבור על כל אחת מהאפשרויות עבור ρ, ובדוק עבור מקרים ספציפיים של $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ כדי להחליט האם להוכיח או להפריך.

1.9 תרגיל!. [מקור: תהליכים מקריים] **מטריצת מרקוב** היא מטריצה ריבועית, שסכום אברי כל עמודה שלה הוא 1. תהא A מטריצת מרקוב. הוכח שלמטריצה A^t יש ערך עצמי $\lambda=1$. מהו הוקטור העצמי המתאים?

1.10 תרגיל!. נתבונן במטריצה הסיבובית $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n}$. הוכח שלכל שורש יחידה ρ מסדר n, הוקטור $(1,\rho,\rho^2,\dots,\rho^{n-1})$ הוא וקטור עצמי של A (מהו הערך העצמי המתאים?).

בלוק ג'ורדן (אין הכוונה ל"חסיאה" של אייק ג'ורדן) הוא מטריצה ריבועית מהצורה

$$J_\lambda=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdot & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1.11 תרגיל. יהא $J_\lambda\in\mathbb{F}^{n\times n}$ בלוק ג'ורדן. מצא את הערכים העצמיים ואת הוקטורים העצמיים של J_λ. מהו מימד המרחבים העצמיים?

1.12 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ותהא $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ ההעתקה של כפל במטריצה A משמאל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. v וקטור עצמי של A (המתאים לערך עצמי λ).

ב. v וקטור עצמי של T_A (המתאים לערך עצמי λ).

1.13 תרגיל. תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית, ויהא E בסיס עבור V. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. v וקטור עצמי של T (המתאים לערך עצמי λ).

ב. $[v]_E$ וקטור עצמי של $[T]_E$ (המתאים לערך עצמי λ).

הסק: $\sigma(T)=\sigma([T]_E)$.

1.14 תרגיל. הוכח שלמטריצות דומות יש אותם הערכים העצמיים, בשלש דרכים:

א. ישירות לפי ההגדרה של ערך עצמי.

ב. לפי דטרמיננטות.

ג*. לפי הצגות של העתקות לינאריות. [ראה: מצא בסיס B שעבורו $[T_{P^{-1}AP}]=[T_A]_B$]

1.15 תרגיל*. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה נילפוטנטית מסדר k.

א. מהם הערכים העצמיים של A ?

ב. הוכח (לא בעזרת (ג)): $\alpha I-A$ הפיכה $\Leftrightarrow$ $\alpha\neq 0$.

ג. עבור $\alpha\neq 0$, הוכח: $(\alpha I-A)^{-1}=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\alpha^{j+1}}A^j$. [ראה: תרגיל בנושא סכום הנדסי של מטריצות]

קבוצת הערכים העצמיים של העתקה לינארית T נקראת **הספקטרום של** T, ומסומנת $\sigma(T)$. באופן דומה מגדירים את $\sigma(A)$ עבור מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

1.16 תרגיל. תהא T ההעתקה מתרגיל 1.2. השתמש בדטרמיננטה כדי למצוא את הספקטרום של T, $\sigma(T)$. השווה לתוצאות מתרגיל 1.2. [ראה: תרגיל אמצע 1]

1.17 תרגיל. א. תהא $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ההעתקה של **סיבוב בזוית** α: $T(x,y)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. הוכח, על פי ההגיון בלבד, שלכל $0<\alpha<\pi$ אין וקטורים עצמיים ל T. מה לגבי $\alpha=\pi k$ (k שלם)?

ב. תהא $A=[T]$ ונסתכל עליה כמטריצה ב $\mathbb{C}^{2\times 2}$. מהם הערכים העצמיים (המרוכבים) של A? האם זה סותר את (א)?

1.18 תרגיל. א. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: $\sigma(AB)=\sigma(BA)$. [ראה: $A(BA)v=(AB)Av$. יש לטפל בנפרד במקרה $Av=0$]

ב. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: $\sigma(A)=\sigma(A^t)$. [ראה: בעזרת דטרמיננטה]

למי שחשב שגבולות יש רק באינפי': נאמר שסדרת מטריצות $A_k\in\mathbb{R}^{n\times n}$ **מתכנסת** למטריצה B (ונכתוב $\lim_{k\to\infty}A_k=B$) אם לכל $1\leq i,j\leq n$, הרכיב ה-i,j של A_k שואף ל b_{ij}: $\lim_{k\to\infty}(A_k)_{ij}=b_{ij}$. גם כאן אפשר להשתמש בכל המשפטים המוכרים על גבולות.

1.19 תרגיל!. יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכח: $f_{AB}(x)=f_{BA}(x)$.

הדרכה: ראשית הוכח עבור המקרה שבו אחת מהן (נניח A) הפיכה. אחר כך השתמש בעובדה הבאה: לכל מטריצה סינגולרית A יש סדרת מטריצות הפיכות A_n המתכנסת ל A (לא תוכיח).

1.20 תרגיל. יהיו $v_1, \dots, v_n$ וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. הוכח ש $v_1, \dots, v_n$ בת"ל. [רמז: נניח שיש צירוף לינארי שנותן אפס. ניקח את הקצר ביותר (מבחינת כמות הוקטורים המופיעים בו) שנותן אפס. כפול אותו ב A, ונקבל עוד אחד. הפק משניהם צירוף לינארי יותר קצר שמתאפס]

2 ליכסון העתקות לינאריות ומטריצות

העתקה לינארית $T: V \to V$ **ניתנת לליכסון** (או: **לכסינה**) אם יש בסיס B של V כך ש $[T]_B$ מטריצה אלכסונית. מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ **ניתנת לליכסון** (**לכסינה**) אם יש מטריצה הפיכה P כך שהמטריצה $D=P^{-1}AP$ אלכסונית.

2.1 תרגיל. יהיו B בסיס של מרחב וקטורי V ממימד n ו $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה כך ש $D=P^{-1}[T]_BP$ מטריצה אלכסונית. יהיו $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}^n$ עמודות P, ויהיו $u_1, \dots, u_n \in V$ הוקטורים שהצגתם בבסיס B היא $v_1, \dots, v_n$, כלומר $[u_1]_B=v_1, \dots, [u_n]_B=v_n$. נסמן $\tilde{B}=\{u_1, \dots, u_n\}$. הוכח:

א. $\tilde{B}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית. [רמז: המקור תחת העתקה לינארית של קבוצה בלתי תלויה לינארית]

ב. $\tilde{B}$ בסיס עבור V.

ג. $[T]_{\tilde{B}}$ מטריצה אלכסונית. [רמז: $[I]_B^{\tilde{B}}=([u_1]_B, \dots, [u_n]_B)=P$, ולכן $[T]_{\tilde{B}}=P^{-1}[T]_BP$]

2.2 תרגיל. תהא $T: V \to V$ העתקה לינארית. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. ההעתקה הלינארית T לכסינה.

ב. קיים בסיס B שעבורו המטריצה $[T]_B$ אלכסונית.

ג. קיים בסיס B שעבורו המטריצה $[T]_B$ לכסינה.

ד. לכל בסיס B, המטריצה $[T]_B$ לכסינה.

[רמז: עבור (ד $\Leftarrow$ א) היעזר בתרגיל הקודם]

2.3 תרגיל. להלן שני ניסוחים של **משפט הליכסון**. הוכח שהם שקולים (מבלי להוכיח את המשפט):

א. תהא $T: V \to V$ העתקה לינארית. T לכסינה אם ורק אם ל V יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של T.

ב. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A לכסינה אם ורק אם יש ל $\mathbb{F}^n$ בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A.

2.4 תרגיל. הוכח את ניסוח א' של משפט הליכסון (תרגיל 2.3). מהם אברי האלכסון? לפי איזה סדר הם מופיעים? [רמז: הצג את T לפי הבסיס הנתון]

2.5 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, כך שיש בסיס ל $\mathbb{F}^n$ המורכב מוקטורים עצמיים של A. תהא $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המטריצה שעמודותיה הן וקטורי הבסיס הזה.

א. הוכח ש P הפיכה.

ב. הוכח שהמטריצה $D=P^{-1}AP$ אלכסונית. [רמז: חשב את $B=AP$ לפי כפל A בעמודות P. אחר כך חשב את $P^{-1}B$ באותה צורה]

ג. הסק את משפט הליכסון (תרגיל 2.3).

2.6 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$. חשב את A^n בצורה מפורשת, לכל n טבעי.

2.7 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

א. לכסן את המטריצה A.

ב. חשב בעזרת (א) את המטריצה $\frac{1}{2^{21}}A^{21}$.

2.8 תרגיל. יהיו $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ מטריצות ב $\mathbb{C}^{2\times 2}$, ויהא n מספר השנה הלועזית. חשב את A^8B^n. [רמז: את B כדאי ללכסן. את A^8 אפשר לחשב ע"י 3 כפלים של מטריצות]

2.9 תרגיל. יהיו $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$.

א. הוכח שהמטריצות A,B דומות. [רמז: הוכחה קצרה!]

ב. מצא מטריצה $P\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, שעבורה $A=P^{-1}BP$.

2.10 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times 3}$. מצא את כל הערכים של a שעבורם המטריצה A לכסינה.

2.11 תרגיל[!]. תהא $\langle 1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots\rangle$ סדרת פיבונצ'י המהוללת, המוגדרת ע"י כלל הנסיגה

$$\begin{cases} a_1=a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n>2) \end{cases}$$

אני זוכר שראיתי פעם את הסידרה הזאת בתלמוד הבבלי, אך איני זוכר היכן בדיוק. תודה למי שיעזור לי. מצא את המטריצה $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$ שעבורה $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ לכל $1<n$. הסק (באינדוקציה) שלכל $n>1$ מתקיים $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}=A^{n-2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ג. השתמש ב(ב) למצוא ביטוי מפורש לאיבר ה n, a_n. [רמז: לכסן את המטריצה A]

2.12 תרגיל[!]. יהיו $A\in\mathbb{F}^{n\times n},\ B\in\mathbb{F}^{m\times m}$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. המטריצה $A\oplus B$ לכסינה.

ב. המטריצה $B\oplus A$ לכסינה.

ג. המטריצות A,B שתיהן לכסינות.

2.13 תרגיל. א. השתמש בתרגיל 1.11 להראות שלכל $2\leq n$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$, המטריצה $J_\lambda\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אינה

לכסינה.

ב. יהא $J_\lambda\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ותהא $A\in\mathbb{F}^{m\times m}$. הוכח שהמטריצה $J_\lambda\oplus A$ אינה לכסינה. [רמז: תרגיל קודם]

ג. תהא $A\in\mathbb{F}^{3\times 3}$ מטריצה הדומה למטריצה $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. האם A לכסינה?

2.14 תרגיל!. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ המטריצה הסיבובית מתרגיל 1.10. הוכח ש A לכסינה.

הדרכה: עליך להראות שהוקטורים העצמיים בלתי תלויים. הראה שהדטרמיננטה של המטריצה המכילה אותם (מטריצת ונדרמונדה!) שונה מאפס.

2.15 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ עם n ערכים עצמיים שונים. הוכח ש A לכסינה. [רמז: תרגיל מסעיף 1]

3 הפולינום האופייני

תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הדטרמיננטה של המטריצה $xI-A$, $f_A(x):=|xI-A|$ היא למעשה פולינום ב $\mathbb{F}[x]$. הפולינום $f_A(x)$ נקרא **הפולינום האופייני של** A. הערה: עד כדי $\pm$ זה שווה לדטרמיננטה $|A-xI|$, שבחישובה סיכוי קטן יותר לטעות. בצורה דומה מוגדר הפולינום האופייני של העתקה לינארית T: $f_T(x):=|xI-T|$. (תזכורת: דטרמיננטה של העתקה לינארית היא הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת את ההעתקה לפי בסיס כלשהו – לא משנה איזה)

3.1 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שהמעלה של הפולינום האופייני $f_A(x)$ היא n.

3.2 תרגיל!. יהיו $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצות, כך ש B הפיכה.

א. הוכח שיש ערך $\lambda\in\mathbb{C}$ כך שהמטריצה $A+\lambda B$ אינה הפיכה. [רמז: התבונן במטריצה $AB^{-1}-xI$]

ב. הראה שלא ייתכנו יותר מ n ערכים עבור λ כך ש $A+\lambda B$ סינגולרית.

3.3 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח את התכונות הבאות של הפולינום האופייני $f_A(x)$:

א. $\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbb{F} : f_A(\lambda)=0\}$.

ב. $f_A(0)=|A|$. בפרט, A הפיכה $\Leftrightarrow$ $f_A(0)\neq 0$.

[רמז: אפשר להציב את הסקלר ורק אחר כך לחשב את הדטרמיננטה]

3.4 תרגיל. תהא $A=\alpha I\in\mathbb{F}^{n\times n}$. מצא את הפולינום האופייני של A.

3.5 תרגיל. א. תהא $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$. מצא את $f_A(x)$ ואת $f_{2A}(x)$.

ב. הוכח שלכל מטריצה ריבועית A ולכל סקלר α, $f_{\alpha A}(x)=\alpha^n\cdot f_A(\frac{x}{\alpha})$ (השווה ל(א)).

3.6 תרגיל. מצא את הפולינום האופייני של כל אחת מהמטריצות המופיעות בתרגיל 7.1 מפרק ו'.

3.7 תרגיל. יהיו $C\in\mathbb{F}^{n\times n},\ B\in\mathbb{F}^{m\times n},\ A\in\mathbb{F}^{m\times m}$, ונסמן $D=\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ (כתיב בלוקים).

א. הוכח: $f_D(x)=f_A(x)\cdot f_C(x)$, ולכן $\sigma(D)=\sigma(A)\cup\sigma(C)$.

ב. הסק שלכל שתי מטריצות ריבועיות A,B מתקיים: $f_{A\oplus B}(x)=f_A(x)\cdot f_B(x)$, ולכן $\sigma(A\oplus B)=\sigma(A)\cup\sigma(B)$.

3.8 תרגיל. יהיו

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 5 & -8 & 5 \\ 8 & -16 & 10 \end{pmatrix}, E=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -3 \\ -4 & 10 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

מצא את הפולינום האופייני של כל אחת מהמטריצות.

3.9 תרגיל. א. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. הוכח: $f_A(x)=f_B(x)$ (במלים: למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני).

ב. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, כך שאחת מהן לפחות הפיכה. הוכח: $f_{AB}(x)=f_{BA}(x)$. [ראה: (וג)]

תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהא λ ערך עצמי של A. אם נוציא מ $f_A(x)$ את כל הגורמים $(x-\lambda)$, נקבל $f_A(x)=(x-\lambda)^k g(x)$. k זה נקרא **הריבוי האלגברי של** λ. המימד של המרחב העצמי V_λ נקרא **הריבוי הגאומטרי של** λ.

3.10 תרגיל. מצא את הריבוי האלגברי ואת הריבוי הגאומטרי של כל אחד מהערכים העצמיים של המטריצה $A=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 22 & -8 & 6 \\ 35 & -12 & 15 \\ 14 & -8 & 14 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$.

3.11 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שלכל ערך עצמי λ של A, הריבוי הגאומטרי של λ קטן או שווה לריבוי האלגברי שלו.

הדרכה: נוכיח עבור העתקה $T\colon V\to V$, כאשר V מרחב מאימד n. (מדוע זה מספיק?)

וג. יהיו $v_1,\dots,v_k$ בסיס עבור V_λ. כרגיל, נשלים אותו לבסיס $B=\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ עבור V.

ב. הראה ש $(x-\lambda)^k$ מחלק את הפולינום האופייני של $[T]_B$.

$3.11\frac{1}{2}$ תרגיל. יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ערכים עצמיים שונים של מטריצה A, ויהיו $v_1\in V_{\lambda_1},\dots,v_n\in V_{\lambda_n}$ וקטורים המקיימים $v_1+\dots+v_n=\vec{0}$. הוכח ש $v_1=\dots=v_n=\vec{0}$.

3.12 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, כך ש $f_A(x)$ מתפרק **לגורמים ליניאריים** (גורמים מהצורה $(x-\alpha)$). הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. A לכסינה.

ב. לכל ערך עצמי λ של A, הריבוי האלגברי של λ שווה לריבוי הגאומטרי שלו.

ג. סכום הריבויים הגאומטריים של הערכים העצמיים של A שווה ל n.

[רמז: תרגיל קודם]

3.13 תרגיל. א. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה. הוכח שהפולינום $f_A(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים. מהם הגורמים? [רמז: למטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה]

ב. נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. הוכח ש A אינה לכסינה. האם זה סותר את (א)?

אנחנו יודעים להציב מטריצות בפולינומים (זוכרים?). מעניין מה יקרה אם נציב מטריצה בפולינום האופייני של עצמה ...

3.14 תרגיל. **א**. הצב את המטריצה A מתרגיל 1.6 בפולינום האופייני שלה (כבר חישבת אותו פעם). מה קיבלת?

ב. צרף את (א) למה שהראית בפרק ו שאלה 2.4(ג), ונסה לנחש מהי המטריצה $f_A(A)$ באופן כללי.

אם ניחשת נכון, קיבלת את **משפט קיילי-המילטון**: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אזי $f_A(A)=O$.

3.15 תרגיל. זוכרים את דני? עכשיו הוא חושב שיש לו הוכחה פשוטה למשפט קיילי-המילטון: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. לפי ההגדרה, $f_A(x)=|A-xI|$, לכן $f_A(A)=|A-AI|=|A-A|=|O|=0$ מ.ש.ל. אבל דני בחור פיקח: הוא יודע ש $f_A(A)$ צריכה להיות מטריצה, והוא קיבל סקלר! מה לא נכון בהוכחה של דני? [רמז: כיצד נראית המטריצה xI? האם מותר להציב A במקום ה-x-ים שבמטריצה זו?]

3.16 תרגיל*. הוכח (הוכחה נכונה!) את משפט קיילי-המילטון.

הדרכה (נמק כל טיעון!): א. נסמן $A(x)=A-xI$, $B(x)=\mathrm{adj}(A-xI)$.

ב. $A(x)\cdot B(x)=|A(x)|\cdot I=f_A(x)\cdot I$.

ג. איברי $B(x)$ הם פולינומים ממעלה $n-1$ או פחות, לכן אפשר לכתוב $B(x)=x^{n-1}B_{n-1}+\ldots+B_1x+B_0$ כאשר כל $B_i\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

ד. נכתוב $f_A(x)=x^n+\ldots a_1x+a_0$. אזי מ(2) נקבל: $B_{n-1}=I,\ B_{n-2}-AB_{n-1}=a_{n-1}I,\ \ldots,B_0-AB_1=a_1I$.

ה. כפול כל אחד מהשוויונים משמאל בחזקה המתאימה של A, כך שאם נסכום את כל השוויונים נקבל בצד ימין את $f_A(A)$, ובצד שמאל נקבל ...

[שאלה: מה הקשר בין תרגיל זה למספר π?]

3.17 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\5&10&-4\\16&32&-12\end{pmatrix}$. מצא את הפולינום האופייני של A, ובעזרתו מצא את A^{-1}.

[רמז: משפט קיילי-המילטון]

3.18 תרגיל[!]. **מופע הקסמים של** vandermonde & companion.

א. יהיו $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{F}$, ותהא $A=\text{companion}(a_0,\dots,a_{n-1})$. הוכח שהפולינום $a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ מאפס את A. [רמז: תרגיל מסעיף 7 בפרק ו']

ב. מצא מטריצה המאפסת את הפולינום $5x^5+3x^3-x^2+7\in\mathbb{R}[x]$.

ג. לכל אות $x\in\{\text{א, ב, }\dots\text{, ת}\}$, נסמן ב־$\underline{x}$ את הערך הגימטרי שלה ($\underline{\text{א}}=1$, $\underline{\text{ב}}=2$, ... $\underline{\text{י}}=10$, $\underline{\text{כ}}=20$, ..., $\underline{\text{ק}}=100$, ... , $\underline{\text{ת}}=400$). מצא מטריצה A המאפסת את הפולינום:

$$\underline{\text{ת}}1+\underline{\text{ר}}x^1+\underline{\text{ג}}x^2+\underline{\text{י}}x^3+\underline{\text{ל}}x^4+\underline{\text{א}}x^6+\underline{\text{ר}}x^7+\underline{\text{ו}}x^8+\underline{\text{ק}}x^9+x^{10}.$$

ד. מצא מטריצה ממשית הדומה למטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & i & -i\\ 0 & 1-i & i\\ 0 & 0 & 1+i\end{pmatrix}$. [רמז: יש לה 3 ערכים עצמיים שונים. מצא מטריצה ממשית עם ערכים עצמיים אלו]

ה. יהיו $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{F}$, ותהא $A=\text{companion}(a_0,\dots,a_k)$. מהם הוקטורים העצמיים של A?

ו. יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$ השורשים של הפולינום $a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n\in\mathbb{C}[x]$. הוכח: אם $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ שונים זה מזה, אזי מטריצת ונדרמונדה

$$\text{vandermonde}(\lambda_1,\dots,\lambda_n):=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1}\\ . & & & & .\\ . & & & & .\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

היא הפיכה (למה?), והמטריצה

$$\text{vandermonde}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^{-1}\text{companion}(a_0,\dots,a_{n-1})\text{vandermonde}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

היא אלכסונית (מהם וקטורי האלכסון?).

4 שילוש מטריצה

משפט השילוש. א. תהא $T\colon V\to V$ העתקה לינארית כך שהפולינום $f_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$. אזי יש ל T הצגה כמטריצה משולשית עליונה.

ב. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך שהפולינום $f_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$. אזי A דומה למטריצה משולשית עליונה.

4.1 תרגיל. א. הוכח שניסוח א' של משפט השילוש שקול לניסוח ב' שלו.

ב. מהם אברי האלכסון במטריצה המשולשית? כמה פעמים מופיע כל איבר?

4.2 תרגיל*. הוכח את משפט השילוש (ניסוח ב').

הדרכה (השלם והסבר כל טענה): נוכיח באינדוקציה על n.

א. יהי v_1 וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ_1. נשלים לבסיס $v_1,\dots,v_n$.

ב. תהי P המטריצה שעמודותיה הן וקטורי הבסיס. מתקיים $B:=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \dots & *\\ 0 & * & \dots & *\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & * & \dots & *\end{pmatrix}$. מספיק להראות ש B דומה למטריצה משולשית עליונה.

ג. נתבונן במטריצה $B_{11}\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ (המתקבלת ע"י מחיקת שורה 1 ועמודה 1 של B). מתקיים:

$f_A(x)=f_B(x)=(x-\lambda_1)f_{B_{11}}(x)$. לכן $f_{B_{11}}(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, ואפשר להפעיל את הנחת האינדוקציה על B_{11}, לקבל מטריצה $Q\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ כך ש $Q^{-1}B_{11}Q$ משולשית עליונה.

ד. נגדיר $\tilde{Q}:=\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right)$. אזי $\tilde{Q}$ הפיכה, והמטריצה $\tilde{Q}^{-1}B\tilde{Q}$ משולשית עליונה.

בפועל, כדי לשלש מטריצה, רצוי להתחיל עם ערך עצמי שיש לו כמה שיותר וקטורים עצמיים בלתי תלויים, $v_1,\dots,v_k$, ואותם להשלים לבסיס כדי לקבל את המטריצה P. כך, המטריצה Q תהיה $(n-k)\times(n-k)$.

4.3 תרגיל. עבור כל אחת מהמטריצות הבאות, הוכח שהמטריצה אינה לכסינה, ומצא מטריצה משולשית הדומה לה:

א. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ב. $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

ג. $C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[רמז: עקוב אחר צעדי ההוכחה של משפט השילוש]

4.4 תרגיל. א. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $f_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. הוכח: $\mathrm{tr}(A)$ שווה לסכום הערכים העצמיים של A, כולל ריבוי אלגברי. [רמז: משפט השילוש]

ב. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכח: הוכח: $\mathrm{tr}(A)$ (שהוא מספר ממשי) שווה לסכום הערכים העצמיים המרוכבים של A, כולל ריבוי אלגברי. [רמז: $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, לכן $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ ואפשר להשתמש ב(א)]

ג. נסח והוכח טענות דומות עבור הדטרמיננטה של מטריצה A.

הרדיוס הספקטרלי של מטריצה $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מוגדר ע״י $r(A):=\max\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(A)\}$.

4.5 תרגיל[!]. הוכח את **משפט הרדיוס הספקטרלי**: תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, כך ש $\sigma(A)\subseteq\mathbb{R}$ (הנחה נוספת זו נועדה לפשט את התרגיל, אולם היא אינה הכרחית). אזי: הסכום $I+A+A^2+\dots=\lim_{k\to\infty}(I+A+\dots+A^k)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $r(A)<1$. [רמז: הוכח את הטענה עבור המקרה ש A משולשית, והשתמש במשפט השילוש כדי להכליל את הטענה למקרה הכללי]

לכל פולינום $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, וקבוצה $S\subseteq\mathbb{F}$, נסמן $f[S]:=\{f(a) : a\in S\}$.

4.6 תרגיל*. **משפט העתקת הספקטרום**: תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, ויהא $f(x)\in\mathbb{F}[x]$. הוכח: $\sigma(f(A))=f[\sigma(A)]$.

הדרכה: א. ההכלה $\supseteq$ קלה: הראה שאם $\lambda\in\sigma(A)$, אזי $f(\lambda)\in\sigma(f(A))$.

ב. כדי להוכיח את ההכלה $\subseteq$, השתמש בעובדה ש A ניתנת לשילוש (מדוע?), והראה שלכל מטריצה משולשית D, אם λ מופיע באלכסון, אזי $f(\lambda)$ מופיע באותו מקום באלכסון של $f(D)$.

4.7 תרגיל!. נתונה **מטריצה אנטי-אלכסונית** $\in\mathbb{C}^{n\times n}$ $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \cdot & & \alpha_2 & 0 \\ \cdot & \iddots & & \cdot \\ 0 & & & \cdot \\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

מצא את הערכים העצמיים של A עד כדי $\pm$. [רמז: מצא את הערכים העצמיים של A^2, והשתמש במשפט הרדיוס הספקטרלי]

4.8 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. מצא מטריצה $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש $B^2=A$.

4.9 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$, כך ש $A^2=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. מצא את הערכים העצמיים של A בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. כאשר $\mathrm{tr}(A)=0$.

ב. כאשר $\mathrm{tr}(A)=2cis\frac{\pi}{4}$.

[רמז: תרגיל קודם]

4.10 תרגיל. תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית חד-חד ערכית, ויהא $\lambda\in\sigma(T)$. הוכח שלכל $n\in\mathbb{Z}$, $\lambda^n\in\sigma(T^n)$.

4.11 תרגיל!. [מקור: תורת הגרפים] א. יהא נתון גרף מכוון בעל n קודקודים, כך שלכל שני קודקודים i,j בגרף יש בדיוק מסלול אחד באורך 2 היוצא מ i ומגיע ל j. הוכח ש n הוא ריבוע שלם, כלומר יש מספר שלם m כך ש $n=m^2$.

ב. יהא $m=\sqrt{n}$. הוכח שהגרף הוא m-**רגולרי**, כלומר מכל קודקוד יוצאות בדיוק m קשתות, ולכל קודקוד נכנסות בדיוק m קשתות.

הדרכה: א. השתמש בתרגיל 5.17 מפרק ג' כדי לתרגם את השאלה לשאלה הבאה: נתונה מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, שכל איבריה הם 0 או 1, ומתקיים $A^2=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (הכל 1-ים). צריך להוכיח ש n הוא ריבוע שלם.

ב. השתמש בתרגיל 7.1(ב) מפרק ו' למצוא את הפולינום האופייני של A^2, ואת הערכים העצמיים של A^2.

ג. השתמש בתרגיל 4.6 להסיק ש $\sqrt{n}$ הוא ערך עצמי של A.

ד. יהי V_n המרחב העצמי (עבור $\lambda=n$) של A^2. מהם איבריו?

ה. יהי v וקטור עצמי של A המתאים לערך העצמי $\sqrt{n}$. הראה ש $v\in V_n$, ולכן הוא מהצורה ....

ו. הסק מהמשוואה $Av=\sqrt{n}v$, ש $\sqrt{n}$ שלם, ושבכל שורה ובכל עמודה של A יש בדיוק $\sqrt{n}$ 1-ים.

ז. תרגם את התוצאה בחזרה למינוחים של גרפים.

5 הפולינום המינימלי

עבור $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, נגדיר $N_A:=\{f(x)\in\mathbb{F}[x] : f(A)=O\}$. אנו יודעים ש $f_A(x)\in N_A$, 0.

5.1 תרגיל. הוכח ש N_A תת-מרחב של $\mathbb{F}[x]$.

המעלה של פולינום $f(x)$ (תסומן $\deg(f)$) היא החזקה הגבוהה ביותר של x שמופיעה בפולינום. אם $f(x)=c$ קבוע, אומרים ש $\deg(f)=0$.

פולינום $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ נקרא **מתוקן** אם **המקדם המוביל** שלו a_n שווה ל 1. כל פולינום שונה מאפס ב N_A ניתן "לתקן" על ידי כפל בסקלר $\frac{1}{a_n}$, ומהתרגיל הקודם יוצא שהפולינום המתוקן אף הוא שייך ל N_A. **הפולינום המינימלי של** A (מסומן $m_A(x)$) הוא הפולינום מהמעלה הקטנה ביותר ב N_A שהוא מתוקן.

5.2 תרגיל. א. מצא (לפי ההגיון) את הפולינום המינימלי של $I\in\mathbb{F}^{n\times n}$ (הוכח שהוא אכן המינימלי).

ב. כנ"ל עבור $A=O\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

ג. תהא $A=\alpha I\in\mathbb{F}^{n\times n}$. מצא את $m_A(x)$.

5.3 תרגיל. הוכח שלכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ **יש פולינום מינימלי יחיד**. [רמז: אם $m_1(x),m_2(x)\in N_A$ שניהם מינימליים, אז דרגתם שוה, ומתקיים $m(x):=m_1(x)-m_2(x)\in N_A$, ודרגתו קטנה יותר]

5.4 תרגיל. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח:

א. אם $A\sim B$, אזי $m_A(x)=m_B(x)$.

ב. אם אחת מהמטריצות A,B הפיכה, אזי $m_{AB}(x)=m_{BA}(x)$.

(השווה לתרגיל 3.7)

מציאת פולינום מינימלי בעזרת משוואות לינאריות: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אנו יודעים ש $\deg(m_A)\leq n$, לכן אפשר לכתוב $m_A(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$, כאשר לכל $\deg(m_A)<k$, $a_k=0$ (ה"צרה" היא שאיננו יודעים את $\deg(m_A)$). נציב את A: $a_nA^n+\ldots+a_0I=O$. כיון שכל המטריצות $I,A,A^2,\ldots,A^n$ ידועות, אנו מקבלים משוואות על המקדמים $a_0,a_1,\ldots,a_n$ (n^2 משוואות על $n+1$ האקדמים). פותרים את המשוואות, ובוחרים מתוך מרחב הפתרונות את הפתרון שנותן מעלה מינימלית k, ומקיים $a_k=1$.

5.5 תרגיל. א. מצא בעזרת פתרון משוואות לינאריות את הפולינום המינימלי של המטריצה $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

ב. יהיו $a,b\in\mathbb{F}$. מצא, באותה דרך, את הפולינום המינימלי של המטריצה $\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{2\times 2}$. [רמז: חלק למקרים לפי הצורך]

משפט החלוקה של פולינומים. אם $f(x),g(x)\in\mathbb{F}[x]$, ומתקיים $\deg(g)\leq\deg(f)$, אזי יש פולינומים $h(x),r(x)\in\mathbb{F}[x]$ המקיימים:

1. $f(x)=g(x)\cdot h(x)+r(x)$.
2. אם $r(x)\neq 0$, אזי $\deg(r)<\deg(g)$.

אם $r(x)=0$, אומרים ש $g(x)$ **מחלק** את $f(x)$, ומסמנים $g(x)|f(x)$.

5.6 תרגיל. יהיו $f(x)=1+x+x^2$, $g(x)=3x-2$. מצא פולינומים $h(x),r(x)\in\mathbb{R}[x]$ שעבורם מתקיימים תנאים (1) ו (2) של משפט החלוקה. האם $g(x)|f(x)$?

5.7 תרגיל*. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

א. יהא $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום המאפס את A. הוכח: $m_A(x)|f(x)$ (כלומר: הפולינום המינימלי של A מחלק את $(f(x))$. בפרט, $m_A(x)|f_A(x)$. [רמז: בהכרח $\deg(m_A)\leq\deg(f)$. הפעל את משפט החלוקה, והצב את A בשני האגפים]

ב. הוכח: $N_A=\{m_A(x)\cdot g(x)\ :\ g(x)\in\mathbb{F}[x]\}$ (הגדרת N_A מופיעה בתחילת הפרק).

5.8 תרגיל[0]. בדוק שהפולינום המינימלי של I (תרגיל 5.3) מחלק את הפולינום האופייני שלו.

5.9 תרגיל. יהא $J_\lambda\in\mathbb{F}^{n\times n}$ בלוק ג'ורדן. הוכח: $f_{J_\lambda}(x)=m_{J_\lambda}(x)=(x-1)^n$. [רמז: תרגיל מסעיף 5 בפרק ג']

5.10 תרגיל*. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: $f_A(x)|(m_A(x))^n$.

הדרכה: ההוכחה דומה לזו של תרגיל מסעיף 3.

א. נכתוב $m(x)=x^k+c_{n-1}x^{k-1}+\ldots+c_0$. נמצא מטריצות B_i כך שאם נסמן $B(x)=x^{k-1}B_0+x^{k-2}B_1+\ldots+B_{k-1}$, אזי $(xI-A)\cdot B(x)=m(x)I$.

ב. הפעל דטרמיננטה על כל אחד מהאגפים, והסק את הדרוש. שים לב ש $m(x)$ הוא סקלר, ו $|B(x)|$ הוא פולינום.

פולינום $f(x)$ שלא ניתן להציגו כמכפלה של שני פולינומים ממעלה גדולה מאפס נקרא **אִי-פָּרִיק**.

5.11 תרגיל. א. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שכל גורם אי-פריק של $f_A(x)$ מופיע גם ב $m_A(x)$.

ב. הוכח שכל שורש של הפולינום האופייני הוא גם שורש של הפולינום המינימלי (לכן, λ ערך עצמי של A אם ורק אם $m_A(\lambda)=0$). [רמז: אם λ שורש של $f_A(x)$, אזי הגורם $(x-\lambda)$ מופיע ב $f_A(x)$]

5.12 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $m_A(x)=(x-1)^2$. יהא $f(x)=x^2+4x+3$. הוכח שהמטריצה $f(A)$ הפיכה. [רמז: השתמש בנתון $m_A(A)=O$ כדי לפשט את $f(A)$, וזכור: מטריצה היא הפיכה רק כאשר הדטרמיננטה שלה אינה אפס]

מתרגיל 5.11 נובעת העובדה השימושית הבאה: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נפרק את הפולינום האופייני שלה למכפלה של גורמים אי-פריקים $f_A(x)=p_1(x)^{k_1}\cdot p_2(x)^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_m(x)^{k_m}$ (הפולינום $p_1(x)$ מופיע k_1 פעמים בפירוק, וכו'). אזי בהכרח $m_A(x)$ הוא מהצורה $p_1(x)^{t_1}\cdot p_2(x)^{t_2}\cdot\ldots\cdot p_m(x)^{t_m}$ כאשר כל $1\leq t_i\leq k_i$, והוא בדיוק הפולינום שהדרגה שלו $t_1\cdot\deg(p_1)+\ldots+t_m\cdot\deg(p_m)$ היא מינימלית. לכן מתחילית מהמקרה שבו כל $t_i=1$, ובודקים אם הפולינום מאפס את המטריצה, ולאט לאט מעלים את המעלה (מגדילים את ה t_i

המתאים בכל פעם – לפעמים יש כמה אפשרויות וצריך לבדוק את כולן), עד שהמטריצה מתאפסת.

5.13 תרגיל. כמה פולינומים לכל היותר יש מהצורה $p_1(x)^{t_1}\cdot p_2(x)^{t_2}\cdot\ldots\cdot p_m(x)^{t_m}$ כאשר כל $1\le t_i\le k_i$?

5.14 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&2\\0&2&0&0&1\\0&0&2&0&1\\0&0&0&3&1\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$. השתמש בטכניקה הנ"ל למציאת הפולינום המינימלי של A במינימום צעדים.

5.15 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. מצא את הפולינום המינימלי של A, ובעזרתו מצא את A^{-1}.

5.16 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ויהא $m_A(x)=a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. A רגולרית (=הפיכה).

ב. 0 אינו ערך עצמי של A.

ג. $a_0\neq 0$.

זוכרים מה שלמדתם בבי"ס יסודי? היה שם מושג בעל השם הנפלא **כמק"ב** (=כפולה משותפת קטנה ביותר). זה היה מעין "מכנה משותף" של מספרים, כלומר המספר הקטן ביותר ששניהם מחלקים, למשל הכמק"ב של $4,6$ הוא 12. ובכן, גם לפולינומים יש כמק"ב.

יהיו $f(x),g(x)\in\mathbb{F}[x]$. **הכמק"ב** של $f(x),g(x)$ הוא הפולינום $p(x)$ מהמעלה הקטנה ביותר כך ששניהם מחלקים אותו. מסמנים $p(x)=[f(x),g(x)]$. באנגלית הכמק"ב נקרא lcm (least common multiply), ולפעמים כותבים $\mathrm{lcm}(f(x),g(x))$ במקום $[f(x),g(x)]$.

5.17 תרגיל[0]. מצא את הכמק"בים הבאים:

א. $[x-1,x-2]$.

ב. $[(x-2)(x-3),(x-2)(x-3)^2]$.

ג. $[(x-2)^2(x-3),(x-2)(x-3)^2(x-4)]$.

5.18 תרגיל. יהיו $A\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $C\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ונסמן $D=\begin{pmatrix}A&B\\O&C\end{pmatrix}$ (כתיב בלוקים).

א. הפרך את הטענה: $m_D(x)=[m_A(x),m_C(x)]$. [רמז: קח $D=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$]

ב. הוכח שלכל שתי מטריצות ריבועיות A,B מתקיים: $m_{A\oplus B}(x)=[m_A(x),m_B(x)]$.

5.19 תרגיל. יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $J_\lambda\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $J_\mu\in\mathbb{F}^{m\times m}$. מצא את הפולינום האופייני והמינימלי של כל אחת מהמטריצות הבאות:

א. $J_\lambda\oplus J_\mu$. [רמז: הפרד למקרים $\mu=\lambda$ ו $\mu\neq\lambda$]

ב. $\alpha I_n\oplus J_\mu$. [גם כאן הפרד למקרים]

ג. $\alpha I_n\oplus\beta I_m$. [וגם כאן]

5.20 תרגיל. א. מצא את הפולינום המינימלי של כל אחת מהמטריצות שבתרגיל 3.8. [הדרכה: עבור המטריצות A,B,C היעזר בתרגילים קודמים]

ב. נתון שהמטריצות D,E דומות לשתיים מהמטריצות A,B,C. מצא את המטריצות הדומות להן.

5.21 תרגיל. הוכח או הפרך: עבור $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$:

א. אם $f_A(x)=f_B(x)$, אזי $m_A(x)=m_B(x)$.

ב. אם $m_A(x)=m_B(x)$, אזי $A\sim B$.

ג. אם $m_A(x)=m_B(x)$, אזי $f_A(x)=f_B(x)$.

[רמז: תרגיל קודם]

5.22 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה אידמפוטנטית (כלומר $A^2=A$).

א. מצא את הפולינום המינימלי של A.

ב. מהן האפשרויות עבור הערכים העצמיים של A?

ג. הוכח שהפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים.

ד. מהן האפשרויות עבור $\mathrm{tr}(A)$? [רמז: תרגיל מספר 4]

5.23 תרגיל!. א. יהא $\mathbb{F}$ שדה כלשהו, ותהא $\emptyset\neq S\subseteq\mathbb{F}^{n\times n}$ קבוצה סופית הסגורה לכפל. הוכח שיש מטריצה $A\in S$ (לא בהכרח הפיכה!) שעבורה $\mathrm{tr}(A)\in\{0,\dots,n\}$.

הדרכה: תהא $A\in S$. יש $i<j$ עבורם $A^i=A^j$.

המשך כאן: קח $k=j-i$, והוכח שהמטריצה $M:=A^k$ היא אידמפוטנטית (זהירות: A לא בהכרח הפיכה, לכן החזקות השליליות של A אינן מוגדרות). כעת השתמש בתרגיל 5.22.

המשך אלטרנטיבי (דרך אגב, איך אומרים בעברית "מצא דרך חלופית"? תשובה: אלתר-נתיב): A מאפסת את הפולינום x^j-x^i. מה זה אומר על הערכים העצמיים של A? הראה שיש חזקה של A שעבורה כל הערכים העצמיים הם 0 או 1. [אגב, בהוכחה זאת צריך להניח ש A ניתנת לשילוש. בקורס יותר מתקדם תראו שהנחה זאת אינה מגבילה את הכלליות]

ב. יהא $\mathbb{F}$ שדה סופי, ותהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שקיים k כך ש $\mathrm{tr}(A^k)\in\{0,1,\dots,n\}$. [תזכורת: עבור המקרה ש A הפיכה ראינו בסמסטר א' שיש k עבורו $A^k=I$ ובפרט $\mathrm{tr}(A^k)=n$]

5.24 תרגיל!. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

א. הוכח שהמימד של המרחב $\mathrm{span}\{I,\ A,\ A^2,\ A^3,\ \dots\}\subseteq\mathbb{F}^{n\times n}$ אינו עולה על n. [רמז: משפט קיילי-המילטון]

ב. מצא דוגמא שבה המימד הוא בדיוק 1.

ג. מצא דוגמא שבה המימד הוא בדיוק n. [רמז: מספיק שלכל i קטן מ n, המטריצה A^i אינה תלויה בקודמותיה. היעזר במה שאתה יודע על פולינומים מינימליים]

פרק ח: מרחבי מכפלה פנימית

בכל הדיון בפרק הזה, השדה $\mathbb{F}$ יכול להיות רק $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

1 מכפלה פנימית

יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. **מכפלה פנימית על** V היא פונקציה $\langle\ ,\ \rangle: V\times V\to\mathbb{F}$ שמתאימה לכל זוג וקטורים $v,u\in V$ סקלר $\alpha\in\mathbb{F}$ (מסמנים $\alpha=\langle v,u\rangle$), ומקיימת את התנאים הבאים:

1) **לינאריות במשתנה הראשון:** $\langle \alpha v+\beta u,w\rangle=\alpha\langle v,w\rangle+\beta\langle u,w\rangle$ (לכל $u,v\in V$ וסקלרים $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$).

2) **הרמיטיות:** $\langle v,u\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}$ (לכל $u,v\in V$).

3) **אי-שליליות:** לכל $v\in V$, $\langle v,v\rangle\geq 0$, ושויון מתקבל אך ורק עבור $v=0$.

1.1 תרגיל. הוכח את התכונות הבאות עבור מכפלה פנימית, כאשר α,β (עם או בלי אינדקסים) מציינים סקלרים, ו u,v (עם או בלי סקלרים) מציינים וקטורים:

א. $\langle\alpha_1 v_1+\ ...\ +\alpha_n v_n,u\rangle=\alpha_1\langle v_1,u\rangle+\ ...\ +\alpha_n\langle v_n,u\rangle$.

ב. **כמעט לינאריות ברכיב השני:** $\langle v,\alpha u+\beta w\rangle=\bar{\alpha}\langle v,u\rangle+\bar{\beta}\langle v,w\rangle$.

ג. $\langle v,\beta_1 u_1+\ ...\ +\beta_n u_n\rangle=\bar{\beta}_1\langle v,u_1\rangle+\ ...\ +\bar{\beta}_n\langle v,u_n\rangle$.

ד. $\langle\alpha_1 v_1+\ ...\ +\alpha_n v_n,\beta_1 u_1+\ ...\ +\beta_n u_n\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_j\langle v_i,u_j\rangle$.

1.2 תרגיל. הוכח שלכל וקטור v מתקיים $\langle v,\vec{0}\rangle=\langle\vec{0},v\rangle=0$.

1.3 תרגיל. הוכח שהפונקציות הבאות הן מכפלות פנימיות:

א. **המכפלה הפנימית הסטנדרטית:** $\langle(a_1,\ ...\ ,a_n),(b_1,\ ...\ ,b_n)\rangle_S:=a_1\bar{b}_1+\ ...\ +a_n\bar{b}_n$ על $\mathbb{F}^n$.

ב. $\langle v,u\rangle:=v^t\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}u$ מעל $\mathbb{R}^2$.

ג. (הכללה של (ג)) $\langle A,B\rangle:=\mathrm{tr}(AB^*)$ על $\mathbb{C}^{m\times n}$. [תזכורת: $A^*:=\bar{A}^t$]

ד. $\langle f,g\rangle:=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{dx}$ (כאשר $a<b$) על מרחב הפונקציות הרציפות $h:[a,b]\to\mathbb{R}$.

[ה. $\langle f,g\rangle:=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{dx}$ (כאשר $a<b$) על מרחב הפונקציות הרציפות $h:[a,b]\to\mathbb{C}$]

1.4 תרגיל. א. חשב את המכפלה הפנימית הסטנדרטית של הוקטורים $(1,2,3),(-1,-2,-3)$ מעל $\mathbb{R}$.

ב. חשב את המכפלה הפנימית של המטריצות $\begin{pmatrix}1&i\\i&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&-i\\i&3\end{pmatrix}$ לפי המכפלה הפנימית מתרגיל 1.1(ג).

ג. יהיו $f(x)=x^2+2x+3$, $g(x)=x-2$. חשב את $\langle f(x),g(x)\rangle$ לפי המכפלה הפנימית מתרגיל 1.1(ד), כאשר $a=0,\ b=1$.

1.5 תרגיל. נגדיר את הפונקציה הבאה מעל $\mathbb{C}^2$: $\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle:=(x_1-x_2)\overline{(y_1-y_2)}$. הוכח

שפונקציה זו אינה מכפלה פנימית.

1.6 תרגיל. בדוק לאילו ערכים של α הפונקציה הבאה היא מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}^2$:
$\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle:=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+\alpha x_2y_2$.

1.7 תרגיל*. תהא $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:
א. הפונקציה $\langle v,u\rangle:=vAu^t$ היא מכפלה פנימית.
ב. $A=A^t$, $a_{11}>0$, $a_{22}>0$, ו $|A|>0$.

1.8 תרגיל. יהא V ממ"פ ממימד n. יהיו $v_1,\ldots,v_n\in V$. נגדיר מטריצה A לפי $a_{ij}=\langle v_i,v_j\rangle$. הוכח: $|A|=0 \Leftrightarrow v_1,\ldots,v_n$ ת"ל. [רמז: השתמש בהגדרה הבסיסית של תלות לינארית, ובתכונות מכפלה פנימית]

1.9 תרגיל. **הצגת מכפלה פנימית כללית בעזרת מטריצה.**
א. תהא נתונה מכפלה פנימית $\langle\ ,\ \rangle$ מעל $\mathbb{C}^n$. נגדיר מטריצה A לפי $a_{ij}=\langle e_i,e_j\rangle$. הוכח שלכל $v,u\in\mathbb{C}^n$ מתקיים $\langle v,u\rangle=vAu^*$. [רמז: כתוב $v=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n$, $u=\beta_1e_1+\ldots+\beta_ne_n$, וחשב כל זוג בנפרד, תוך שימוש בתכונות מ"פ]
ב. הסק מתכונות מ"פ ומהגדרת A, ש $A=A^*$ וכן $a_{ii}>0$ לכל i.
ג. הוכח שהתכונות ב(ב) אינן מספיקות לכך שהפונקציה $\langle v,u\rangle=vAu^*$ תהיה מכפלה פנימית.

1.10 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית, ויהא $u\in V$ כך שלכל $v\in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle=0$.
הוכח ש $u=0$.

$1.10\frac{1}{2}$ תרגיל. תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכח:
א. אם לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle T(u),v\rangle=0$, אז $T=O$.
ב. אם S קבוצה פורשת של V ו D קבוצה פורשת של $\operatorname{im}T$, ולכל $u\in S$ ו $v\in D$ מתקיים $\langle T(u),v\rangle=0$, אז $T=O$.
[רמז: תרגיל קודם]

1.11 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ עם מכפלה פנימית, ותהא $T:V\to V$ העתקה לינארית, כך שלכל $v\in V$, $\langle T(v),v\rangle=0$. הוכח ש $T=O$. [רמז: פתח את $\langle T(u+v),u+v\rangle=0$, והצב iu באקום u. היעזר בתרגיל 1.8]

1.12 תרגיל. יהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס עבור V.
א. יהא $v\in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i,v\rangle=0$. הוכח ש $v=0$.
ב. יהיו $u,w\in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i,u\rangle=\langle v_i,w\rangle$. הוכח ש $u=w$.

1.13 תרגיל. הוכח שאם הוקטורים $v_1,\ldots,v_4$ מקיימים $\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}3 & i=j\\ -1 & i\neq j\end{cases}$, אזי $v_1+\ldots+v_4=0$.

2 הנורמה המושרית ממכפלה פנימית

נורמה על V היא פונקציה $\|\ \|:V\to\mathbb{R}$, שלה התכונות הבאות:

1) לכל $v\in V$, $\|v\|\geq 0$, ושויון מתקבל אך ורק עבור $v=0$.
2) $\|\alpha v\|=|\alpha|\cdot\|v\|$ (לכל $v\in V$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$).
3) **אי-שויון המשולש:** $\|v+u\|\leq\|v\|+\|u\|$ (לכל $v,u\in V$).

אינטואיטיבית, הנורמה מציינת את ה"אורך" של הוקטורים. זה מסביר את התכונות שאנו דורשים מנורמה (וזה גם עוזר לזכור אותן).

[**2.1 תרגיל**. הוכח שהפונקציות הבאות הן נורמה על $\mathbb{F}^n$:

א. **נורמת-**p: $\|(a_1,\ldots,a_n)\|_p:=(|a_1|^p+\ldots+|a_n|^p)^{1/p}$. (מוגדר עבור $1\leq p$ קבוע)

ב. **נורמת-**∞: $\|(a_1,\ldots,a_n)\|_\infty:=\max\{|a_1|,\ldots,|a_n|\}$.]

מי שמכיר הרבה מכפלות פנימיות יכול לקבל הרבה נורמות:

2.2 תרגיל. **הנורמה המושרית ע"י מכפלה פנימית:** תהא $\langle,\rangle$ מכפלה פנימית, ונגדיר פונקציה $\|\ \|:V\to\mathbb{R}$ על ידי $\|v\|:=\sqrt{\langle v,v\rangle}$. הוכח שפונקציה זו היא נורמה על V, בהשתמש בתרגיל 4.20 (שיוכח בהמשך).

2.3 תרגיל. תהא $\|\ \|$ הנורמה המושרית ממכפלה פנימית $\langle\ ,\ \rangle$ על V.

א. הוכח את **כלל המקבילית**: לכל $u,v\in V$ מתקיים $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2)$. מהי המשמעות הגאומטרית של כלל זה?

ב. הוכח את **הצורות הקוטביות** של המכפלה הפנימית:

- כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$: $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2)$.
- כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$: $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2)$.

2.4 תרגיל. תהא $\|\ \|$ הנורמה המושרית ממכפלה פנימית $\langle\ ,\ \rangle$ על V. הוכח:

א. לכל $u,v\in V$ מתקיים: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2+2\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle)$.

ב. **אי-שויון שוקי-שוורצנגר** (שמות בדויים): לכל $u,v\in V$ מתקיים $|\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle)|\leq\|u\|\cdot\|v\|$. [ראה: השתמש ב(א) ובאי-שויון המשולש]

ג. **אי-שויון קושי-שוורץ עבור נורמה ממשית:** אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, אז לכל $u,v\in V$ מתקיים $|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\cdot\|v\|$.

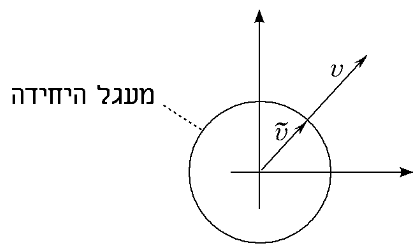
3 וקטורים נורמליים ומעגל היחידה

וקטור v המקיים $\|v\|=1$ נקרא **נורמלי**. עבור וקטור $v\neq 0$, התהליך $v\mapsto\tilde{v}=\frac{1}{\|v\|}\cdot v$ נקרא **נירמול** של הוקטור.

3.1 תרגיל. הוכח שלכל וקטור $v\neq 0$, הוקטור $\tilde{v}=\frac{1}{\|v\|}\cdot v$ הוא נורמלי.

3.2 תרגיל. נרמל את הוקטור $(1,1)\in\mathbb{R}^2$ לפי כל אחת מהנורמות הבאות: $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$.

אוסף הוקטורים הנורמלים נקרא **מעגל היחידה**. מבחינה גאומטרית, הנירמול "מכווץ" או "מותח" את הוקטור כדי שארכו יהיה 1, מבלי לשנות את כיוונו, כלומר מוצאים את הוקטור עם אותו כיוון, השייך למעגל היחידה:



3.3 תרגיל. צייר את מעגל היחידה ב $\mathbb{R}^2$ לפי הנורמות הבאות:

א. $\|\ \|_1$.

ב. $\|\ \|_2$.

ג. $\|\ \|_\infty$.

אנו יודעים שהיחס בין היקף מעגל לפי הנורמה $\|\ \|_2$ לקוטרו שווה ל π. מסתבר שבנורמות האחרות היחס שונה מ π ...

3.4 תרגיל. חשב את היחס בין היקף המעגלים (סכום אורכי הקשתות) מסעיפים (א) ו(ג) של תרגיל 3.3 לקוטר שלהם (פעמיים הרדיוס).

4 וקטורים אורתוגונלים ואורתונורמלים

וקטורים v,u נקראים **מאונכים** (או: **אורתוגונלים**) אם $\langle v,u\rangle=0$ (מסמנים גם $v\perp u$).

4.1 תרגיל. בדוק אילו מזוגות הוקטורים הבאים מאונכים זה לזה:

א. $(0,1,0,2),(100,0,-999,0)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^4$.

ב. $(1,i),(1,i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

ג. $(1,i),(1,-i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

4.2 תרגיל. הוכח שהוקטורים הסטנדרטיים $e_i,e_j\in\mathbb{R}^n$ מאונכים כאשר $i\neq j$.

קבוצה של וקטורים נקראת **אורתוגונלית** אם כל אבריה מאונכים זה לזה.

4.3 תרגיל. תהא S קבוצה אורתוגונלית כך ש $0\notin S$. הוכח ש S בת"ל.

תהי נתונה קבוצה אורתוגולית. אם, בנוסף, כל אבריה נורמלים, אז הקבוצה נקראת **אורתונורמלית**. במלים אחרות, הקבוצה $\{v_1, \dots, v_n\}$ היא אורתונורמלית אם $\langle v_i, v_j\rangle=\delta_{ij}$ לכל $1\leq i,j\leq n$.

4.4 תרגיל. תהא S קבוצה אורתונורמלית. הוכח ש S בת"ל.

4.5 תרגיל. הוכח שאם $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אורתוגונלית שאינה מכילה את וקטור האפס, אזי $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ קבוצה אורתונורמלית.

אתם זוכרים איך מחשבים אינטגרלים?

4.6 תרגיל. הוכח שהקבוצות הבאות הן אורתונורמליות ביחס למכפלה הפנימית המתאימה:

א. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ $(\mathbb{F}=\mathbb{R}/\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

ב. הקבוצה $\{\sin(nx), \cos(nx) : n\in\mathbb{Z}\}$ ביחס למכפלה $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fg\,\mathrm{dx}$ במרחב הפונקציות הרציפות ב $[0,2\pi]$.

[ג. הקבוצה $\{\mathrm{cis}(nx) : n\in\mathbb{Z}\}$ ביחס למכפלה $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\bar{g}\,\mathrm{dx}$ במרחב הפונקציות הרציפות מ $[0,2\pi]$ ל $\mathbb{C}$]

בסיס שהוא קבוצה אורתונורמלית נקרא **בסיס אורתונורמלי** (סעיף (א) בתרגיל 4.6 הוא דוגמא כזאת).

4.7 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n, ותהא $B\subseteq V$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. B בסיס אורתונורמלי.

ב. B קבוצה אורתונורמלית מגודל n. [רמז: תרגיל קודם]

4.9 תרגיל. הגדר (ישירות) על $V=\mathbb{R}_n[x]$ מכפלה פנימית, כך ש $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ יהווה בסיס אורתונורמלי לגבי מכפלה זאת.

למעשה, על כל מרחב וקטורי אפשר להגדיר מכפלה פנימית. יתר על כן, אפשר לבחור בסיס כרצוננו ולהגדיר את המכפלה כך שהבסיס הוא אורתונורמלי!

4.10 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי עם בסיס B. הגדר מכפלה פנימית על V, כך שביחס למכפלה זאת, B הוא בסיס אורתונורמלי. [רמז: השתמש באיזומורפיזם $V\cong\mathbb{F}^n$]

עכשיו אני אשכנע אתכם שבסיס אורתונורמלי זה דבר טוב. יהא V מרחב וקטורי עם בסיס $B=\{v_1,\ \dots\ ,v_n\}$. יהא $v\in V$. אזי יש לו הצגה יחידה $v=\alpha_1 v_1+\ \dots\ +\alpha_n v_n$ (זוכרים?). אנו מעוניינים למצוא את המקדמים. נראה שאם B אורתונורמלי, אזי מציאת המקדמים פשוטה בתכלית.

4.11 תרגיל. נניח ש B הנ"ל בסיס אורתונורמלי.

א. הוכח שלכל i, $\alpha_i=\langle v,v_i\rangle$ (במילים אחרות, $[v]_B=(\langle v,v_1\rangle,\ \dots\ ,\langle v,v_n\rangle)$). [רמז: נניח ש $v=\alpha_1 v_1+\ \dots\ +\alpha_n v_n$. חשב את המכפלות $\langle v,v_i\rangle$]

ב. תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכח שרכיב ij של המטריצה $[T]_B$ הוא $\langle T(v_j),v_i\rangle$.

התרגיל הבא אומר, שאם B אורתונורמלי, אזי המכפלה הפנימית של כל שני וקטורים שווה למכפלה הפנימית הסטנדרטית של ההצגה שלהם (לפי B). ואנחנו אוהבים את זה, כי זה אומר שמספיק לדעת לטפל במקרה הסטנדרטי, ואז כל בעיה נוכל לתרגם למקרה הסטנדרטי ולפתור אותה שם.

4.12 תרגיל. יהא B בסיס אורתונורמלי של V, ותהא $\langle\ ,\ \rangle$ מכפלה פנימית כלשהי על V. הוכח שלכל $v,u\in V$ מתקיים $\langle v,u\rangle=\langle [v]_B,[u]_B\rangle_S$. (במילים אחרות: אם $B=\{v_1,\ \dots\ ,v_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, אזי לכל $v,u\in V$ מתקיים $\langle v,u\rangle=\langle v,v_1\rangle\cdot\overline{\langle u,v_1\rangle}+\ \dots\ +\langle v,v_n\rangle\cdot\overline{\langle u,v_n\rangle}$)

נזכור שמטריצה $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ נקראת **אוניטרית** אם $AA^*=I$.

$4.12\frac{1}{2}$ תרגיל. תהא $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. P אוניטרית.

ב. עמודות P מהוות בסיס אורתונורמלי ל $\mathbb{C}^n$.

ג. שורות P מהוות בסיס אורתונורמלי ל $\mathbb{C}^n$.

4.13 תרגיל. א. יהיו E,F בסיסים אורתונורמלים עבור מרחב וקטורי V. הוכח שהמטריצה $P=[I]_F^E$ היא אוניטרית.

ב. תהא $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה אוניטרית. הוכח שקיים בסיס אורתונורמלי B כך ש $P=[I]_S^B$ (כאשר S הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^n$).

4.13 תרגיל. מצא בסיס אורתונורמלי ל $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית $\langle a_0+a_1x+a_2x^2,b_0+b_1x+b_2x^2\rangle=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$. [רמז: תרגיל קודם]

4.14 תרגיל. משפט פיתגורס:

א. יהא $B=\{v_1,\ \dots\ ,v_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V. הוכח שלכל $v\in V$ מתקיים $\|v\|^2=|\langle v,v_1\rangle|^2+\ \dots\ +|\langle v,v_n\rangle|^2$. בפרט, הוכח שלכל i מתקיים $\|v\|\geq|\langle v,v_i\rangle|$.

ב. יהא $v=\alpha_1 v_1+\ \dots\ +\alpha_n v_n$. בטא את $\|v\|^2$ בעזרת $\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_n$.

ג. יהא $B=\{v_1,v_2\}\subseteq\mathbb{R}^2$ בסיס אורתונורמלי, ויהא $v\in V$ כך ש $\langle v,v_2\rangle=3$ ו $\langle v,v_1\rangle=4$. מצא את $\|v\|$.

איך מוצאים בסיס אורתונורמלי ביחס למכפלה פנימית נתונה? (תרגיל 4.8 אינו מספק את התשובה, כיוון ששם בחרנו את המכפלה הפנימית לפי הבסיס הנוח לנו, בעוד שכאן המכפלה נתונה וצריך לבחור את הבסיס לפיה.) מסתבר שמספיק למצוא בסיס רגיל, ו"לתקן" אותו. תהליך התיקון נקרא "תהליך גרם-שמידט", ויש לו שתי גרסאות: אחת שהמרצים אוהבים, ושניה שהתלמידים אוהבים ("אוהבים" זו מלה חזקה מדי. אולי "מעדיפים" היא המלה הנכונה ...). למעשה, יש גם גירסה שלישית שמיודענו דני אוהב. נפגוש אותה בהמשך. נניח שיש לנו בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ עבור V.

תהליך גרם-שמידט (עבור מרצים):

1. $\tilde{v}_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$.
2. For $i=2,3,\dots,n$ do:

$$w_i = \langle v_i, \tilde{v}_1\rangle \tilde{v}_1 + \langle v_i, \tilde{v}_2\rangle \tilde{v}_2 + \dots + \langle v_i, \tilde{v}_{i-1}\rangle \tilde{v}_{i-1}$$
$$\mathring{v}_i := v_i - w$$
$$\tilde{v}_i := \frac{\mathring{v}_i}{\|\mathring{v}_i\|}$$

4.15 תרגיל. הוכח שתהליך גרם-שמידט הנ"ל, כאשר הוא מופעל על בסיס של המרחב, מוגדר היטב (כלומר לא ייתכן ש $\mathring{v}_i=0$ ולכן מחלקים באפס), והקבוצה המתקבלת בסוף התהליך הנ"ל היא בסיס אורתונורמלי.

הדרכה: הוכח באינדוקציה על $i=1,\dots,n$, את כל הטענות הבאות בו-זמנית:

א. לכל j כך ש $j<i$ מתקיים $\tilde{v}_j \in \mathrm{span}\{v_1,\dots,v_j\}$, וכן

ב. $\mathring{v}_i$ שונה מאפס ומאונך לכל הוקטורים הקודמים $\tilde{v}_j$ $(j=1,\dots,i-1)$

4.16 תרגיל. א. הוכח שלכל מרחב וקטורי ממימד סופי יש בסיס אורתונורמלי.

ב. הוכח שניתן להשלים כל קבוצה אורתונורמלית לבסיס אורתונורמלי של המרחב.

4.17 תרגיל. יהא $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס עבור מרחב מכפלה פנימית V, ויהא $B'=\{v_1',\dots,v_n'\}$ הבסיס המתקבל ע"י הפעלת תהליך גרם-שמידט על B. הוכח שלכל $k=1,\dots,n$, הקבוצה $\{v_1',\dots,v_k'\}$ היא בסיס אורתונורמלי עבור $\mathrm{span}\{v_1,\dots,v_k\}$. בפרט, $\mathrm{span}\{v_1',\dots,v_k'\}=\mathrm{span}\{v_1,\dots,v_k\}$. [רמז: מיידי מתרגיל קודם]

4.18 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי. הוכח שלכל בסיס B עבור V יש בסיס E עבור V, כך שמטריצת המעבר מ B ל E וכן מטריצת המעבר מ E ל B הן משולשיות. [רמז: התבונן בתהליך גרם-שמידט. כמו-כן, זכור שאם P משולשית, אז גם P^{-1} משולשית, לכן מספיק להוכיח מחצית מהדרוש]

4.19 תרגיל. אי-שויון בֶּסֶל. תהא $S=\{v_1,\dots,v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב V.

א. הוכח שלכל $v\in V$ מתקיים: $\|v\|^2 \geq |\langle v,v_1\rangle|^2 + \dots + |\langle v,v_k\rangle|^2$. [רמז: השלם את S לבא"נ]

ב. הוכח ששויון מתקבל אך ורק כאשר $v\in \mathrm{span}(v_1,\dots,v_k)$.

4.20 תרגיל. אי-שויון קושי-שוורץ (עבור נורמה מרוכבת):

א. הוכח שכל נורמה $\|\ \|$ המושרה ממכפלה פנימית $\langle\ ,\ \rangle$ מקיימת $|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\cdot\|v\|$ לכל $u,v\in V$, ושוויון מתקבל רק כאשר u,v תלויים לינארית.

ב. הסק מ(א) את אי-שויון שוקי-שוורצנגר (תרגיל 2.4(ב)).

[רמז: הפעל את אי-שויון בסל עם הקבוצה האורתונורמלית $\left\{\frac{u}{\|u\|}\right\}$.]

הוריאציה הבאה של תהליך גרם-שמידט היא יותר ידידותית למשתמש.

תהליך גרם-שמידט (עבור תלמידים): א. קודם הופכים את הבסיס $\{v_1,\ \dots\ ,v_n\}$ לקבוצה אורתוגונלית:

1. $\mathring{v}_1:=v_1$.
2. For $i=2,3,\ \dots\ ,n$ do:

$$w_i\ =\ \langle v_i,\mathring{v}_1\rangle\frac{\mathring{v}_1}{\|\mathring{v}_1\|^2}+\langle v_i,\mathring{v}_2\rangle\frac{\mathring{v}_2}{\|\mathring{v}_2\|^2}+\ \dots\ +\langle v_i,\mathring{v}_n\rangle\frac{\mathring{v}_{i-1}}{\|\mathring{v}_{i-1}\|^2}$$

$$\mathring{v}_i\ :=\ v_i-w$$

ב. אחר כך מנרמלים כל אחד מאברי הקבוצה שהתקבלה: $\tilde{v}_i:=\frac{\mathring{v}_i}{\|\mathring{v}_i\|}$ לכל $i=1,\ \dots\ ,n$.

4.21 תרגיל. א. הוכח שהקבוצה המתקבלת בסוף התהליך החדש זהה לקבוצה המתקבלת בתהליך הקודם (ולכן זה בסיס אורתונורמלי). [רמז: אינדוקציה על n]

ב. הסק שהקבוצה $\{\mathring{v}_1,\ \dots\ ,\mathring{v}_n\}$ המתקבלת בסוף שלב א' של התהליך החדש היא אורתוגונלית (ולכן בסיס).

התרגיל הבא יעזור לכם להבין מדוע השיטה הזאת עדיפה עבור תלמידים.

4.22 תרגיל. יהא $B=\{(4,-3,2,1),(3,-2,1,0),(2,-1,0,0),(1,0,0,0)\}$ בסיס עבור $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

א. הפעל את הגירסה הראשונה של תהליך גרם-שמידט על B.

ב. הפעל את הגירסה השניה של תהליך גרם-שמידט על B.

ג. הפעל את גירסת "ק"ג-דני" על B.

4.23 תרגיל. התוצאה בתרגיל 4.22 לא היתה אסתטית. כתוב את אברי B בסדר הפוך, והפעל תהליך גרם-שמידט לפי הסדר החדש.

א. מדוע התקבלה תוצאה אחרת?

ב. מדוע זה היה יותר קל?

כפי שראינו בתרגיל 4.22, אפילו בשיטה השניה אפשר לקבל ביטויים לא סימפטיים במכנה. לדני מיודענו

יש פתרון פשוט לבעיה עבור התהליך השני: בשלב א', הוא פשוט מוחק את המכנה של $\mathring{v}_i$. נקרא לתהליך כזה בשם **תהליך קילוגרם-דני**. (כאוכן, כאמכחן מקרכוו גס למחליך כזה כשס "מחליך גרס-שאידט")

4.24 תרגיל. נסח את תהליך קילוגרם-דני בצורה פורמלית, והוכח אותו. [ראה: באקוס השורה $\mathring{v}_i := v_i - w$, נכמוב "בחר סקלר $c_i \neq 0$ כרצונך, וקח $v_i := c_i(v_i - w)$". הוכח שהמהליך עובד]

4.25 תרגיל. הפעל את תהליך ק"ג-דני לפתרון תרגיל 4.22.

4.26 תרגיל. יהא $B=\{(i,i,0),(0,i,i),(i,0,i)\}$ בסיס עבור $\mathbb{C}^3$. מצא בסיס אורתונורמלי (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית) $B'=\{v_1', v_2', v_3'\}$, כך שמתקיים $\text{span}(v_1)=\text{span}(v_1')$ וכן $\text{span}(v_1,v_2)=\text{span}(v_1',v_2')$.

4.27 תרגיל. מגדירים מכפלה פנימית על $\mathbb{R}_1[x]$ לפי $\langle f(x),g(x)\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{dx}$. נתון הבסיס $B'=\{v_1=2,\ v_2=x\}$. מצא בסיס אורתונורמלי $B=\{v_1', v_2'\}$ עבור $\mathbb{R}_1[x]$, כך שמתקיים $\text{span}(v_1)=\text{span}(v_1')$.

4.28 תרגיל. יהא $V=\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הרגילה. נתבונן בבסיס $B=\{(1,1,1),(0,1,0),(1,2,3)\}$. מצא בסיס אורתונורמלי $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ כך שמטריצת המעבר מ B ל E תהיה משולשית. [ראה: מהליך גרס-שאידט]

יהא V מרחב וקטורי <u>מעל</u> $\mathbb{R}$ עם מכפלה פנימית. יהיו $u,v\in V$ ושונים מ $\vec{0}$. **הזוית** θ **בין** u **ו** v היא המספר הממשי (היחיד) $0\leq\theta<\pi$, המקיים $\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$. **המרחק** בין הוקטורים מוגדר ע"י $\|u-v\|$.

4.29 תרגיל. יהא $V=\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{dx}$.

א. מצא את הזוית ואת המרחק בין הוקטורים $f(x)=1,\ g(x)=x$ ב V.

ב. מצא בסיס אורתונורמלי ל V.

5 המרחב הניצב

יהא V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית, ותהי $S\subseteq V$ קבוצה כלשהי. יהא $v\in V$. אם v מאונך לכל אברי S, נסמן $v\perp S$. נגדיר את **המרחב הניצב** ל S: $S^\perp := \{v\in V : v\perp S\}$. כלומר $v\in S^\perp$ אם v מאונך לכל $u\in S$.

5.1 תרגיל. הוכח שלכל קבוצה $S\subseteq V$, הקבוצה $S^\perp$ היא תת-מרחב של V.

5.2 תרגיל. א. הוכח שכל תת-מרחב ממימד 1 של $\mathbb{R}^2$ הוא למעשה ישר העובר דרך הראשית $(0,0)$.
ב. הוכח שעבור תת-מרחב כזה, המרחב הניצב לו במכפלה הפנימית הסטנדרטית הוא הישר הניצב לו (ועובר דרך הראשית).

5.3 תרגיל. הוכח:
א. $\{0\}^{\perp}=V$.
ב. $V^{\perp}=\{0\}$.
ג. אם $S_1\subseteq S_2$, אזי $S_1^{\perp}\supseteq S_2^{\perp}$.
ד. לכל קבוצה $S\subseteq V$, $\mathrm{span}(S)^{\perp}=S^{\perp}$.

5.4 תרגיל. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות, כאשר U,W תת-מרחבים של מרחב מכפלה פנימית V:
א. $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$.
ב. $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}$.
ג. $(U+W)^{\perp}=(U\cap W)^{\perp}$.

5.5 תרגיל*. יהא $V=\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{dx}$.
א. מצא את המרחב $W^{\perp}$ עבור $W=\mathrm{span}\{1-x\}$.
ב. הגדר במפורש העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ כך שהתת-מרחבים W ו $W^{\perp}$ הם T-אינוריאנטים, ויש בסיס B עבורו $[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&4&5\end{pmatrix}$. [רמז: מצא בסיס עבור W ועבור $W^{\perp}$, והשתמש במשפט ההגדרה של העתקה לינארית]

5.6 תרגיל. נגדיר מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}^{n\times n}$ ע"י $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(AB^{*})$. מצא את המרחב הניצב עבור התת-מרחבים הבאים:
א. מרחב המטריצות העל-אלכסוניות $\begin{pmatrix}0&*&\cdots&*\\ \vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&*\\ 0&\cdots&&0\end{pmatrix}$.
ב. מרחב המטריצות המקיימות $\mathrm{tr}(A)=0$.

5.7 תרגיל. תהא $S=\{v_1,\ldots,v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב V. הוכח שלכל $v\in V$ מתקיים: $v-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle v_i\in S^{\perp}$.

5.8 תרגיל. תהא $S=\{(1,-1,1,-1)\}\subseteq\mathbb{R}^4$ (עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית). מצא בסיס אורתונורמלי

ל $S^\perp$.

5.9 תרגיל. במרחב $\mathbb{C}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, נתון $U=\text{span}\{(1,1,1,1),(1,1,2,0)\}$. חשב בסיסים אורתונורמליים עבור $U, U^\perp$.

5.10 תרגיל. יהא U תת-מרחב של מרחב מכפלה פנימית V, ויהא $v\notin U$. הוכח שקיים $w\perp U$ כך ש $w\not\perp v$.

הדרכה: א. קח בסיס $\{u_1, \dots ,u_k\}$ עבור U, והשלם אותו לבסיס $B=\{u_1, \dots ,u_k,v_{k+1}, \dots ,v_n\}$ עבור V.

ב. בצע תהליך גרם-שמידט על B.

ג. נציג $v=\alpha_1u_1+ \dots +\alpha_ku_k+\alpha_{k+1}v_{k+1}+ \dots +\alpha_nv_n$. בהכרח יש $k+1\le i\le n$ כך ש $\alpha_i\neq 0$. קח $w=\alpha_iv_i$.

5.11 תרגיל. א. הוכח: לכל תת-מרחב U של V מתקיים $(U^\perp)^\perp=U$. [רמז: תרגיל קודם]

ב. השלם (והוכח) בעזרת (א): לכל קבוצה $S\subseteq V$, $(S^\perp)^\perp=$____. [רמז: תרגיל קודם]

5.12 תרגיל. הוכח את **משפט הפירוק הניצב**: לכל תת-מרחב W של V, מתקיים $V=W\oplus W^\perp$.

הדרכה: א. כאן תמיד, קח בסיס עבור W, $\{w_1, \dots ,w_l\}$, והשלם אותו לבסיס עבור V, $\{w_1, \dots ,w_l,v_1, \dots ,v_k\}$.

ב. הפעל על הבסיס את תהליך ג"ש. נקבל בא"נ $\{\tilde{w}_1, \dots ,\tilde{w}_l,\tilde{v}_1, \dots ,\tilde{v}_k\}$.

ג. $\tilde{w}_1, \dots ,\tilde{w}_l\in W$, ולכן הם מהווים בסיס עבור W. $\tilde{v}_1, \dots ,\tilde{v}_k\in W^\perp$, ולכן הם בסיס עבור $W^\perp$.

ד. $V=\text{span}\{\tilde{w}_1, \dots ,\tilde{w}_l,\tilde{v}_1, \dots ,\tilde{v}_k\}=\text{span}\{\tilde{w}_1, \dots ,\tilde{w}_l\}\oplus\text{span}\{\tilde{v}_1, \dots ,\tilde{v}_k\}=W\oplus W^\perp$.

5.13 תרגיל. הוכח את הטענה שבתרגיל 5.11(א) בעזרת משפט הפירוק הניצב.

5.14 תרגיל. יהא $\mathbb{R}^3$ המרחב עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהא $W=\text{span}\{(1,2,3),(0,1,2)\}$.

א. מהו המימד של $W^\perp$?

ב. מצא בסיס עבור $W^\perp$. [רמז: פתור מערכת משוואות הומוגנית.]

5.15 תרגיל. הוכח או הפרך את הטענה הבאה (זה רעיון של דני): יהא V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $U, W\subseteq V$, כך ש $U\oplus W=V$. אזי $U^\perp=W$.

יהיו V מרחב וקטורי, ו W תת-מרחב של V. נקבע $B=\{w_1, \dots ,w_k\}$ בסיס אורתונורמלי של W. נגדיר פונקציה $\pi_B\colon V\to W$ על ידי $\pi_B(v)=\langle v,w_1\rangle w_1+ \dots \langle v,w_k\rangle w_k$ לכל $v\in V$.

תרגיל. יהא B בסיס אורתונורמלי עבור תת-מרחב W של V.

א. π_B היא פונקצית הטלה, כלומר העתקה לינארית ומקיימת $\pi_B(\pi_B(v))=\pi_B(v)$ לכל $v\in V$.

ב. לכל $v\in V$, $v-\pi_B(v)\in W^\perp$.

ג. לכל זוג בסיסים אורתונורמליים B,C של W מתקיים $\pi_B=\pi_C$, כלומר ההטלה אינה תלויה בבחירת הבסיס. [רמז: $v=\pi_B(v)+(v-\pi_B(v))$ מהווה הפירוק הניצב, יש רק הצגה אחת כזאת.]

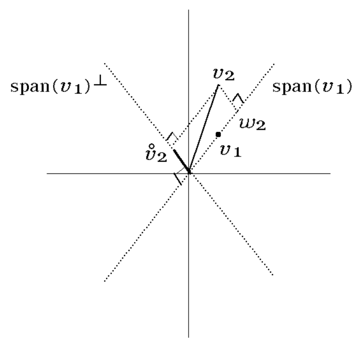
לאור התרגיל הקודם, הוקטור $\pi_B(v)$ נקרא **ההיטל** של v על w.

תרגיל. יהא w ההיטל של v על W. אזי:

א. w הוא הוקטור הקרוב ביותר ל v שיש ב W.

ב. משפט פיתגורס: $\|w\|^2+\|v-w\|^2=\|v\|^2$.

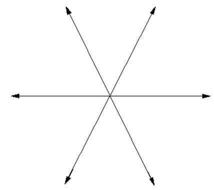
את תהליך גרם-שמידט אפשר להמחיש בצורה גאומטרית: לכל i, נסמן $W_i:=\mathrm{span}\{\mathring{v}_1,\dots,\mathring{v}_i\}$. אזי $w_i\in W_i$ הוא ה**היטל** של v_i על המרחב W_i, והוקטור $\mathring{v}_i=v_i-w_i$ הוא החלק של v_i שניצב ל W_i. נצייר זאת עבור המקרה של $\mathbb{R}^2$ (עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית). ניקח למשל $v_1=(1,1)$, $v_2=(1,2)$. אזי הוקטורים המתאימים הם:



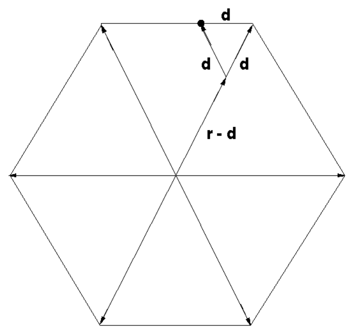
6 נספח לפרק ח: נורמה שבה מעגל היחידה הוא משושה, ו-$\pi=3$

שערו בנפשכם עולם שטוח, שבו ניתן ללכת אך ורק בכיוון מזרח; או בזויות של 60, 120, 180, 240 או 300 מעלות ביחס לכיוון מזרח (ניתן להשוות זאת לחלקים מסויימים של מנהטן, שם כל הכבישים הם בכוון מערב או בזויות 90, 180, ו-270 מעלות ביחס למערב). המרחק בין שתי נקודות יוגדר להיות האורך של המסלול הקצר ביותר המחבר ביניהן. בעולם כזה, אוסף כל הנקודות שמרחקן מנקודה נתונה הוא קבוע, מהווה משושה משוכלל. לכן יהיה היחס בין היקף העיגול לקטרו בדיוק 3.

נצייר זאת. כיווני התנועה האפשריים הם:



אלו הכיוונים היחידים שמותר לנוע בהם; ולכן המעגל יראה כך:



ברור שמרחק הקדקודים מהמרכז הוא אורך החץ. כדי להבין שגם מרחק שאר הנקודות מהמרכז שוה לאורך החץ, נתבונן למשל במסלול ש"הולך" דרך החץ המתאים, ו"פונה" לעבר הנקודה ברגע שהדבר אפשרי (במגבלות כיווני התנועה). המשולש הקטן שנוצר (ראה ציור) הוא שוה צלעות (עובדה זו נובעת מהזויות שבחרנו עבור התנועה), ולכן המרחק יהיה (ראה בציור) $(r-d)+d=r$, כדרוש.

כל שנותר לנו הוא להגדיר מודל זה מבחינה פורמאלית. נגדיר נורמה על $\mathbb{R}^2$, שתיקרא **נורמת** –⬡:

$$\|(x,y)\|_{\circ} := \max\left\{|x|+\tfrac{\sqrt{3}}{3}|y|,\ \tfrac{2\sqrt{3}}{3}|y|\right\}$$

המרחק בין שתי נקודות $(a,b),(c,d)$ מוגדר ע"י $\|(a,b)-(c,d)\|_{\circ}$.

6.1 תרגיל*. הוכח שהפונקציה $\|\ \|_{\circ}$ היא נורמה.

6.2 תרגיל*. הוכח שאכן מעגל היחידה בנורמה זאת הוא משושה.

לכל נורמה $\|\ \|$, נגדיר את $\pi_{\|\ \|}$ להיות היחס בין היקף המעגל לפי הנורמה (כמו המעגל מחלקים לקשתות שקל למדוד באמצעות הנורמה, וסכום אורכי הקשתות הוא ההיקף. בנורמה הרגילה אין חלוקה סופית נוחה, ולכן ההיקף נמדד ע"י גבול. אצלנו זה יותר קל) לקוטרו (פעמיים הרדיוס שלו).

6.3 תרגיל*. מצא את $\pi_{\|\ \|_1}$, $\pi_{\|\ \|_2}$, $\pi_{\|\ \|_\infty}$, ואת $\pi_{\|\ \|_\circ}$. (היעזר בתרגילים 3.3, 6.2)

פרק ט: המרחב הדואלי

1 פונקציונלים לינאריים

יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. העתקה לינארית $\varphi: V \to \mathbb{F}$ נקראת **פונקציונל לינארי**.

1.1 תרגיל. הוכח שההעתקות הבאות הן פונקציונלים לינאריים (אומר להשתמש בכל מה שכבר למדנו):

א. $\mathrm{tr}: \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{F}$.

ב. $\varphi: \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $\varphi(x,y,x) := x+y+z$.

ג. $\varphi: \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $\varphi(x) := \alpha x$ ($\alpha \in \mathbb{F}$ קבוע).

ד. $\varphi: \mathbb{F}_n[x] \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $\varphi(f) := f(a)$ ($a \in \mathbb{F}$ קבוע).

1.2 תרגיל!. א. הוכח שההעתקה $\partial: \mathbb{F}_n[x] \to \mathbb{F}$, המוגדרת ע"י $\partial(f) := f'(0)$, היא פונקציונל לינארי.

ב. (הכללה של (א)) יהא V מרחב וקטורי, ותהא $T: V \to \mathbb{F}_n[x]$ העתקה לינארית. הוכח שלכל $a \in \mathbb{F}$ קבוע, **פונקציונל ההצבה** $\varphi_a: V \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $\varphi_a(v) := T(v)(a)$ הוא פונקציונל לינארי. הסבר מדוע זה מכליל את (א).

1.3 תרגיל. הוכח שההעתקות הבאות אינן פונקציונלים לינאריים:

א. $\det: \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{F}$.

ב. $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\varphi(x,y) = x \cdot y$.

אוסף הפונקציונלים הלינאריים $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{F})$ מסומן בקצרה V^*, ונקרא **המרחב הדואלי** של V. (בשלב הזה התלמידים מתחילים לראות כוכבים בעיניים ...)

1.4 תרגיל. הוכח שלכל $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ולכל $\varphi \in W^*$ מתקיים $\varphi \circ T \in V^*$. הסבר מדוע זה מכליל את תרגיל 1.2.

1.5 תרגיל. הוכח שלכל $\varphi \in \mathbb{F}^*$ יש $\alpha \in \mathbb{F}$ (קבוע) כך ש $\varphi(x) = \alpha x$.

1.6 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ויהיו $u,v \in V$ כך שלכל $\varphi \in V^*$ המקיים $\varphi(u)=0$ מתקיים $\varphi(v)=0$. הוכח שיש $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש $v=\alpha u$.

1.7 תרגיל!. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$. יהיו $f,g \in V^*$ כך שהפונקציה $h(v) := f(v) \cdot g(v) \in V^*$. הוכח שבהכרח $f=O$ או $g=O$.

הדרכה: א. יהא $\alpha \neq 0,1$, ויהא $v \in V$. חשב את $h(\alpha v)$ בשתי דרכים, להראות ש $h(v)=0$. לכן $h=O$.

ב. נניח שיש שני וקטורים $u \neq v$ כך ש $f(v) \neq 0$ וכן $g(u) \neq 0$. הראה ש $f(v-u)g(v-u) \neq 0$. מה זה סותר?

ג. נניח שיש וקטור v כך ש $f(v)\neq 0$. הראה שלכל וקטור u (לא בהכרח שונה מ v), $g(u)=0$, ולכן $g=O$.

ד. הסק את הדרוש.

1.8 תרגיל. הוכח את הגירסה הבאה של **משפט ההרחבה**: יהא V מרחב וקטורי, ויהא $W\subseteq V$ תת-מרחב. הוכח שלכל $\varphi\in W^*$ יש $\tilde{\varphi}\in V^*$ כך ש $\tilde{\varphi}|_W=\varphi$. [רמז: קח בסיס ל W והשלם לבסיס עבור V. הגדר את $\tilde{\varphi}$ על בסיס זה]

1.9 תרגיל!. הוכח את הגירסאות הבאות של **משפט ההפרדה**: יהא V מרחב וקטורי.

א. לכל $0\neq v\in V$ יש $\varphi\in V^*$ כך ש $\varphi(v)\neq 0$.

ב. לכל $v,u\in V$ כך ש $v\neq u$ יש $\varphi\in V^*$ כך ש $\varphi(v)\neq\varphi(u)$. הראה שזה מכליל את (א).

ג. לכל תת-מרחב $W\subseteq V$ ולכל $v\notin W$ יש $\varphi\in V^*$ כך ש $\varphi|_W=O$, ו $\varphi(v)\neq 0$. הסק את (ב) עבור המקרה ש u,v בת"ל. [רמז: כדי להראות שזה מכליל את (ב), קח $W=\mathrm{span}(u)$]

1.10 תרגיל. תהא $T:V\to W$ העתקה לינארית. נגדיר פונקציה $T^*:W^*\to V^*$ על ידי $T^*(\varphi):=\varphi\circ T$. הוכח:

א. לכל $\varphi\in W^*$ מתקיים $T^*(\varphi)\in V^*$.

ב. T^* היא העתקה לינארית.

2 פונקציונלים לינאריים במרחבי מכפלה פנימית

בכל התרגילים בפרק זה אנו מניחים ש V הוא מרחב מכפלה פנימית מעל השדה $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$).

2.1 תרגיל. א. (השווה לתרגיל 1.1(ב)) הוכח שלכל $w\in V$ קבוע, ההעתקה $\varphi_w:V\to\mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $\varphi(v)=\langle v,w\rangle$ היא פונקציונל לינארי.

ב. (השווה לתרגיל 1.5(ו)) הוכח את **משפט ההצגה של ריז**: יהא V מרחב מכפלה פנימית, ויהא $\varphi\in V^*$. **אזי קיים** $w\in V$ (וקטור קבוע) **יחיד כך ש** $\varphi(v)=\langle v,w\rangle$ **לכל** $v\in V$. [רמז: יהא B בסיס אורתונורמלי עבור V ויהא $S=\{1\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}$. אזי לכל $v\in V$ מתקיים $\varphi(v)=[\varphi(v)]_S=[\varphi]^B_S[v]_B=\left\langle [v]_B,\overline{[\varphi]^B_S}\right\rangle_S$. השתמש בתרגיל 4.12 לבחירת w]

3 הבסיס הדואלי

3.1 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n. מהו $\dim(V^*)$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$? [רמז: $V^*=\mathrm{Hom}(V,\mathbb{F})\cong\mathbb{F}^n$]

יהא V מרחב וקטורי עם בסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$. עבור $i=1,\dots,n$ נגדיר פונקציונלים לינאריים φ_i לפי ערכיהם על הבסיס: $\varphi_i(v_j):=\delta_{ij}$. במלים אחרות, אם נסמן $S=\{1\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}$, אזי: $[\varphi_1]^B_S=e_1,\ [\varphi_2]^B_S=e_2,\dots,[\varphi_n]^B_S=e_n$.

3.2 תרגיל. הוכח שהפונקציונלים $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ הנ"ל הם בת"ל.

כיון ש $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ בת"ל, והמימד של V^* הוא n (תרגיל 3.1), הקבוצה $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ מהווה בסיס עבור V^*. בסיס זה נקרא **הבסיס הדואלי ל** B, ומסומן B^*.

3.3 תרגיל. יהא $V=\mathbb{C}^3$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית. יהא $B=\{(i,i,i),(i,i,0),(i,0,0)\}$.

א. מצא בסיס דואלי $B^*=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ עבור V^*.

ב. מצא וקטור $v_0\in V$ כך ש $\varphi_1(v)=\langle v,v_0\rangle$ לכל $v\in V$.

3.4 תרגיל. נתון כי $B=\{1+2x,\ 2+3x\}$ הוא בסיס עבור $\mathbb{R}_1[x]$. מצא את הבסיס הדואלי $B^*=\{\varphi_1,\varphi_2\}$ ל B במפורש, כלומר חשב במפורש את $\varphi_1(a+bx)$ ואת $\varphi_2(a+bx)$.

אם יודעים מהו הבסיס הדואלי, אז קל לחשב הצגות של וקטורים.

3.5 תרגיל. יהיו V מרחב וקטורי עם בסיס $B=\{v_1, \dots ,v_n\}$, $B^*=\{\varphi_1, \dots ,\varphi_n\}$ הבסיס הדואלי המתאים, ו $v\in V$. הוכח: $[v]_B=(\varphi_1(v), \dots ,\varphi_n(v))$.

3.6 תרגיל. היעזר בשאלה 3.4 כדי להציג את הוקטורים $3-4x, 13+9x$ לפי הבסיס B.

ידיעת הבסיס הדואלי מאפשרת גם חישוב קל של מטריצות מעבר בין בסיסים:

3.7 תרגיל!. יהא V מרחב וקטורי עם בסיסים $F=\{f_1, \dots ,f_n\}$, $E=\{e_1, \dots ,e_n\}$, ותהא $P=(p_{ij})_{n\times n}$ מטריצת המעבר המקיימת $P[v]_E=[v]_F$ לכל $v\in V$, כלומר $P=[I]_F^E$.

א. הוכח: לכל $j=1, \dots ,n$, $e_j=p_{1j}f_1+ \dots +p_{nj}f_n$. [רמז: הצג את הצגות לפי בסיס F]

ב. יהא $F^*=\{\varphi_1, \dots ,\varphi_n\}$ הבסיס הדואלי ל F. הראה שלכל i,j: $p_{ij}=\varphi_i(e_j)$. [רמז: (א)]

3.8 תרגיל!. יהא $\mathbb{F}_n[x]$ מרחב הפולינומים עם הבסיס הסטנדרטי $E=\{1,x,x^2, \dots ,x^n\}$, ויהיו $a_0, \dots ,a_n\in\mathbb{F}$ קבועים השונים זה מזה (זוהי הנחה ש $\#\mathbb{F}\geq n+1$). נתבונן בפולינומי לגרנז'

$$f_i(x):=\frac{(a_0-x)(a_1-x)\dots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\dots(a_n-x)}{(a_0-a_i)(a_2-a_i)\dots(a_{i-1}-a_i)(a_{i+1}-a_i)\dots(a_n-a_i)}$$

(זוכרים? תרגיל אסט״ם 7 בפרק ד׳). הוכח שפונקציונלי ההצבה $\varphi_{a_0}, \dots ,\varphi_{a_n}$ מקיימים $\varphi_{a_i}(f_j)=\delta_{ij}$, ולכן:

א. $F=\{f_0, \dots ,f_n\}$ בלתי תלויה לינארית ב $\mathbb{F}_n[x]$ (ולכן בסיס).

ב. $\varphi_{a_0}, \dots ,\varphi_{a_n}$ הם הבסיס הדואלי ל F.

ג. הוכח, בעזרת תרגיל קודם, שמטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי לבסיס $f_0, \dots ,f_n$, היא $[I]_F^E=\text{vandermonde}(c_0, \dots ,c_n)$.

3.9 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי עם בסיס $B=\{v_1, \dots ,v_n\}$ ובסיס סטנדרטי S, ויהא $B^*=\{\varphi_1, \dots ,\varphi_n\}$ הבסיס הדואלי המתאים. תהא P מטריצת המעבר המקיימת $P[v]_S=[v]_B$ לכל $v\in V$, כלומר $P=[I]_B^S$. הוכח: לכל i ולכל $v\in V$, $\mathrm{R}_i(P)[v]_S = \varphi_i(v)$. לכן אפשר למצוא את $\varphi_1, \dots ,\varphi_n$ ע"י כפל במטריצת המעבר P. (תזכורת: את המטריצה P קל לחשב: כותבים את הוקטורים v_i בעמודות, והופכים את המטריצה שהתקבלה.)

3.10 תרגיל. יהא $B=\{(1,0,3),(0,2,2),(0,2,1)\}$ בסיס עבור $\mathbb{R}^3$.

א. מצא את הבסיס הדואלי B^* בצורה ישירה.

ב. מצא את הבסיס הדואלי B^* בעזרת מטריצת מעבר מתאימה (השווה ל(א)).

ג. יהא $v=(0,1,1)$. חשב את $[v]_B$.

יהא $\varphi\in V^*$. φ וקטור במרחב הוקטורי V^*, לכן יש לו הצגה יחידה בצורה $\varphi=\alpha_1\varphi_1+ \dots +\alpha_n\varphi_n$, כלומר $[\varphi]_{B^*}=(\alpha_1, \dots ,\alpha_n)$ (שימו לב: זו הצגה של הוקטור φ לפי בסיס של המרחב V^*, ולא הצגה של הפונקציונל $\varphi: V\to \mathbb{F}$ לפי בסיסים של V ו $\mathbb{F}$). התרגיל הבא אומר מהם המקדמים המתאימים.

3.11 תרגיל. בסימונים הנ"ל, הוכח שלכל $\varphi\in V^*$, $\varphi=\varphi(v_1)\varphi_1+ \dots +\varphi(v_n)\varphi_n$ (במלים אחרות: $([\varphi]_{B^*}=(\varphi(v_1), \dots ,\varphi(v_n))$).

3.12 תרגיל. בהמשך לתרגיל 3.9, הצג את הפונקציונל הלינארי $\varphi(x,y,z)=x-y-z$ כצירוף לינארי של אברי B^*.

3.13 תרגיל. יהא $\varphi\in(\mathbb{R}^2)^*$ כך ש $\varphi(3,4)=5$ ו $\varphi(5,6)=7$. חשב את $\varphi(10,5)$:

א. ע"י הצגת $(10,5)$ כצירוף לינארי של $(3,4),(5,6)$.

ב. ע"י מציאת φ. [רמז: אפשר להיעזר בתרגיל קודם למציאת φ]

פרק י: ההעתקה הצמודה

1 ההעתקה הצמודה

יהיו V, W מרחבי מכפלה ממימד סופי (שים לב, כל הפרק הזה נדבר על מרחבי מכפלה. בפרט, השדה $\mathbb{F}$ יכול להיות רק $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$), ותהא $T: V\to W$ העתקה לינארית. נקבע $w\in W$.

1.1 תרגיל. בהתאם לסימונים הנ"ל, הוכח שההעתקה $\varphi(v):=\langle T(v), w\rangle$ מקיימת $\varphi\in V^*$.

משפט ההצגה של ריס אומר שכל פונקציונל לינארי הוא "בעצם" כפל בוקטור קבוע v_0. לכן, קיים וקטור **יחיד** $v_0\in V$ שעבורו $\varphi(v)=\langle v, v_0\rangle$ (לכל $v\in V$). שים לב: בהגדרת $\varphi(v)$ המכפלה הפנימית היתה ב W. כעת, המכפלה הפנימית היא ב V. במלים אחרות, במקום להפעיל את T ואח"כ לכפול ב w, אפשר ישר לכפול ב v_0. קיימת לכן העתקה $T^*: W\to V$ המוגדרת ע"י ההתאמה הנ"ל $w\mapsto v_0$.

1.2 תרגיל⁰. א. **כוכב נולד**: הוכח שלכל $v\in V$ ולכל $w\in W$ מתקיים $\langle T(v), w\rangle=\langle v, T^*(w)\rangle$.

ב. הוכח שאם $R: W\to V$ העתקה לינארית המקיימת $\langle T(v), w\rangle=\langle v, R(w)\rangle$, אזי $R=T^*$.

1.3 תרגיל. הוכח שההעתקה $T^*: W\to V$ היא העתקה לינארית.

ההעתקה T^* נקראת **ההעתקה הצמודה ל** T.

1.4 תרגיל. עבור $V=W=\mathbb{R}^2$ עם המכפל הפנימית הסטנדרטית, מצא (ישירות לפי ההגדרה) את ההעתקה הצמודה ל $T(x,y)=(2x+3y, 2y)$. [רמז: $T^*(v)=[T^*]v$. מצא גם את המטריצה $[T^*]=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$]

1.5 תרגיל. א. יהיו $T, S: V\to W$ העתקות לינאריות. הוכח: $(S+T)^*=S^*+T^*$.

ב. תהא $T: V\to W$ העתקה לינארית, ויהא $\alpha\in\mathbb{F}$. הוכח: $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$.

ג. יהיו $T: V\to W$, $S: W\to U$ העתקות לינאריות. הוכח: $(ST)^*=T^*S^*$.

ד. תהא $T: V\to W$ העתקה לינארית. הוכח: $(T^*)^*=T$.

1.6 תרגיל!. תהא $T: V\to V$ העתקה לינארית, ויהא n מספר השנה הלועזית. מצא את ההעתקה

$$\left(T^{\overbrace{**\cdots*}^{2n+1\ \text{כוכבים}}} + T^{\overbrace{**\cdots*}^{2n\ \text{כוכבים}}}\right)^{\overbrace{**\cdots*}^{[n/2]\ \text{כוכבים}}}.$$

1.7 תרגיל. תהא $T: V\to V$ העתקה לינארית, ויהא $W\subseteq V$ תת-מרחב T-אינוריאנטי. הוכח: $W^\perp$ הוא T^*-אינוריאנטי.

המשפט המופיע בתרגיל הבא הוא מאד חשוב ושימושי.

1.8 תרגיל. הוכח את **משפט ההצגה לפי בסיסים אורתונורמליים**: תהא $T\colon V\to W$ העתקה לינארית, ויהיו E בסיס אורתונורמלי עבור V, ו F בסיס אורתונורמלי עבור W. הוכח: $[T^*]_E^F=([T]_F^E)^*$. [רמז: תרגיל מסעיף 4 בפרק ח']

1.9 תרגיל. עבור המקרה $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, הסק ממשפט ההצגה לפי בא"נ (תרגיל 1.8) שלכל העתקה לינארית $T\colon V\to W$ ובסיסים E,F עבורם מתקיים $[T^*]_E^F=([T]_F^E)^t$.

1.10 תרגיל. ישם את תרגיל 1.8 למציאת T^* מתרגיל 1.4 (מהם הבסיסים האורתונורמליים שתיקח?).

1.11 תרגיל. השתמש בתרגיל 1.8 כדי להוכיח את תרגיל 1.5 בקלי קלות.

2 סוגים מיוחדים של העתקות לינאריות

התרגיל הבא נותן מוטיבציה לסעיף זה.

2.1 תרגיל. לכל $\alpha\in\mathbb{C}$ נגדיר העתקה לינארית $T_\alpha\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ע"י $T_\alpha(z)=\alpha\cdot z$. הוכח: $(T_\alpha)^*=T_{\bar{\alpha}}$. [רמז: תרגיל מסעיף 1]

העתקה לינארית $T\colon V\to V$ נקראת **אופרטור** על V. נסתכל על אופרטורים $T\colon V\to V$ שמקיימים תכונות דומות לתכונות של מספרים מרוכבים (כאשר ההצמדה של אופרטור $T\mapsto T^*$ אנלוגית להצמדה של מספר מרוכב $z\mapsto\bar{z}$).

2.2 תרגיל. תן תיאור פשוט (רמז: גאומטרי) של כל אחת מהקבוצות הבאות:

א. $\{z\in\mathbb{C} : z\cdot\bar{z}=\bar{z}\cdot z\}$.

ב. $\{z\in\mathbb{C} : z\cdot\bar{z}=1\}$.

ג. $\{z\in\mathbb{C} : \bar{z}=z\}$.

ד. $\{z\in\mathbb{C} : \bar{z}=-z\}$.

לאור התרגיל הנ"ל, אנו מגדירים את הסוגים הבאים של אופרטורים:

- T **נורמלי** אם $TT^*=T^*T$. (לפי זה, כל מספר מרוכב הוא "נורמלי")
- T **אוניטרי** (**אורתוגונלי** במקרה $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) אם $TT^*=I$. (המילה "אוניטרי" באה מ unit, כאנלוגיה למעגל היחידה ב $\mathbb{C}$)
- T **צמוד לעצמו** (או: **הרמיטי** ($\mathbb{F}=\mathbb{C}$) או: **סימטרי** ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$)) אם $T^*=T$.
- T **אנטי-צמוד לעצמו** (או: **אנטי-הרמיטי** ($\mathbb{C}$), או: **אנטי-סימטרי** ($\mathbb{R}$)), אם $T^*=-T$.

באופן דומה, מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת **נורמלית** אם $AA^*=A^*A$, **אוניטרית** אם $AA^*=I$, וכו'.

2.3 תרגיל. יהא V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$. הוכח: אם $\|Tv\|=\|T^*v\|$ לכל $v\in V$, אז T נורמלי. [רמז: תרגיל מסעיף

2.4 תרגיל. T העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. אזי:

א. יש ל T הצגה יחידה $T=A+iB$, כאשר A,B העתקות לינאריות צמודות לעצמן. [רמז: נניח שכוכן $T=A+iB$ כדרוש. מהו T^*? הבע את A ואת B בעזרת T,T^*]

ב. T נורמלי $\Leftrightarrow$ A,B מתחלפים (כלומר $AB=BA$).

2.5 תרגיל. הראה כי כל אופרטור ניתן להצגה כסכום של אופרטור צמוד לעצמו ואופרטור אנטי צמוד לעצמו. [רמז: דומה לסעיף בתרגיל קודם]

2.6 תרגיל. יהא $T:V\to V$ אופרטור, ויהא B בסיס אורתונורמלי עבור V. נסמן $A=[T]_B$. הוכח שלכל תכונה $\mathbf{P}\in\{$נורמלי(ת), אוניטרי(ת)/אורתוגונלי(ת), צמוד(ה) לעצמו(ה), אנטי-צמוד(ה) לעצמו(ה)$\}$: T הוא בעל התכונה $\mathbf{P}$ $\Leftrightarrow$ A היא בעלת התכונה $\mathbf{P}$.

2.7 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ותהא

$\mathbf{P}\in\{$נורמלי(ת), אוניטרי(ת)/אורתוגונלי(ת), צמוד(ה) לעצמו(ה), אנטי-צמוד(ה) לעצמו(ה)$\}$

תכונה. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. A היא בעלת תכונה $\mathbf{P}$.

ב. A^t היא בעלת התכונה $\mathbf{P}$.

ג. A^* היא בעלת התכונה $\mathbf{P}$.

2.8 תרגיל[!]. יהא $T:V\to V$ אופרטור. בשרטוט הבא מופיעות תכונות שיכולות להיות ל T.

צמוד לעצמו	נורמלי
אנטי-צמוד לעצמו	אוניטרי

א. הוסף חץ מכל תכונה לכל תכונה שהיא גוררת.

ב. הוכח שלא ניתן להוסיף חיצים לגרף שקיבלת, ע"י מציאת דוגמאות נגדיות. השתדל להיות חסכוני ככל האפשר. [רמז: מספיק להסתכל על מטריצות]

ג. בשרטוט מופיעות ארבע מחלקות של אופרטורים. מצא תיאור פשוט של החיתוך של כל שתיים מהן.

2.9 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. A אוניטרית.

ב. A מטריצת מעבר בין שני בסיסים אורתונורמליים. [רמז: תרגיל קודם]

ג. עמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי.

ד. שורות A מהוות בסיס אורתונורמלי. [רמז: תרגיל קודם]

2.10 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$, ויהא $\{u_1, \dots, u_n\}$ בסיס אורתונורמלי עבור V. הוכח: T אוניטרי $\Leftrightarrow$ $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ בסיס אורתונורמלי עבור V.

2.12 תרגיל. יהא $T: V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו. הוכח: $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

העתקה לינארית $T: V \to W$ נקראת **איזומטריה** אם לכל $v, u \in V$ מתקיים $\|T(v) - T(u)\| = \|v - u\|$, כלומר המרחק בין $T(u)$ ל $T(v)$ שווה למרחק בין u ל v. נאמר ש T **שומרת נורמה** אם לכל $v \in V$ מתקיים $\|T(v)\| = \|v\|$.

$2.12\frac{1}{2}$ תרגיל. תהא $T: V \to W$ העתקה לינארית. הוכח: T היא איזומטריה $\Leftrightarrow$ T שומרת נורמה.

נאמר ש T **שומרת זויות** אם לכל $u, v \in V$, הזוית בין $T(u)$ ל $T(v)$ שווה לזוית בין u ל v. T **שומרת מכפלה פנימית** אם $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ לכל $u, v \in V$.

2.13 תרגיל. א. תן דוגמא להעתקה שומרת זויות שאינה שומרת מכפלה פנימית.
ב. תהא T איזומטריה. הוכח: T שומרת זויות $\Leftrightarrow$ T שומרת מכפלה פנימית.

2.14 תרגיל. הוכח שכל אופרטור אוניטרי הוא שומר מכפלה פנימית, איזומטריה, וכן שומר זויות ונורמה. הסק שאם T אוניטרי אז $v \perp u$ $\Leftrightarrow$ $T(v) \perp T(u)$.

3 שילוש וליכסון אוניטריים ואורתוגונליים

3.1 תרגיל*. הוכח את **משפט השילוש האוניטרי עבור אופרטורים**: יהא V מרחב מכפלה מעל $\mathbb{C}$, ויהא $T: V \to V$ אופרטור. הוכח שיש בסיס אורתונורמלי B של V, כך ש $[T]_B$ מטריצה משולשית.
הדרכה: א. השתמש במשפט השילוש (פרק ג' סעיף 4) למציאת בסיס B כך ש $[T]_B$ משולשית.
ב. יהא $\tilde{B}$ הבסיס המתקבל מ B ע"י תהליך גרם-שמידט. היעזר בתרגיל 4.16 מפרק ח' להראות שמטריצת המעבר בין הבסיסים היא משולשית.
ג. היעזר בתרגיל 6.20 מפרק ה' להשיג הדרוש.

3.2 תרגיל. השתמש בתרגיל 3.1 להוכחת **משפט השילוש האוניטרי עבור מטריצות**: לכל מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש $P^{-1}AP (= P^*AP)$ משולשית. [רמז: התבונן בהעתקה הלינארית T_A]

הוכחת תרגיל 3.1 מספקת לנו את הטכניקה הבאה לשילוש מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. משלשים אותה בשיטה הרגילה (ראה פרק ג' סעיף 4), כלומר מוצאים מטריצה P כך ש $P^{-1}AP$ משולשית, ומבצעים תהליך גרם-שמידט על עמודות P לקבלת המטריצה האוניטרית $\tilde{P}$ כך ש $\tilde{P}^{-1}A\tilde{P}$ משולשית.

3.3 תרגיל. תהא $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-2i & -2i & 2i \\ 1+i & 1-i & 3+i \\ 1+3i & 3+3i & 1-3i \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times 3}$. מצא מטריצה אוניטרית $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש P^*AP משולשית.

3.4 תרגיל. א. להלן ניסוח של **משפט השילוש האורתוגונלי**: יהא V מרחב מכפלה מעל $\mathbb{R}$, ויהא $T:V\to V$ אופרטור כך שהפולינום האופייני $f_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$. הוכח שיש בסיס אורתונורמלי B של V, כך ש $[T]_B$ מטריצה משולשית. מה צריך לשנות בהוכחה של משפט השילוש האוניטרי כדי לקבל הוכחה של משפט זה?

3.5 תרגיל!. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. הפולינום $f_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$.

ב. קיימת מטריצה אורתוגונלית $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $P^{-1}AP$ מטריצה משולשית. [רמז: תרגיל קודם]

3.6 תרגיל. תהא $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -35 & -40 & -52 \\ 73 & 77 & 98 \\ -36 & -36 & -45 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. מצא מטריצה אורתוגונלית P כך ש $P^{-1}AP$ משולשית.

יש תלמידים שאינם אוהבים לעבוד עם אופרטורים ומטריצות שאינם ניתנים ללכסון. הם חושבים שזה "טירוף", כלומר שאופרטורים (או מטריצות) שאינם ניתנים ללכסון הם פשוט לא נורמליים. התרגילים הבאים מראים שיש משהו בדבריהם ...

3.7 תרגיל. תהא A מטריצה משולשית ונורמלית. הוכח ש A אלכסונית. [רמז: בה"כ A משולשית עליונה. חשב את אברי האלכסון של AA^* ושל A^*A והשווה ביניהם]

3.8 תרגיל. הוכח את **משפט הליכסון האוניטרי עבור אופרטורים**: יהא V מרחב מכפלה מעל $\mathbb{C}$, ויהא $T:V\to V$ אופרטור. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. יש בסיס אורתונורמלי B של V, כך ש $[T]_B$ מטריצה אלכסונית.

ב. T נורמלי.

[רמז: הכיוון (א) ⇐ (ב) קל. נוכיח את הכיוון ההפוך. יהא B בסיס אורתונורמלי כך ש $A:=[T]_B$ משולשית (למה יש כזה?). A נורמלית. השתמש בתרגיל הקודם]

הוכחת תרגיל 3.8 ממחישה כלי חשוב מאד לפתרון בעיות הקשורות להעתקות לינאריות: מציגים את האופרטורים לפי בסיס אורתונורמלי מתאים, והבעיות הופכת לבעיה על מטריצות משולשיות/אלכסוניות, שקל יותר להתמודד איתן. אז תזכרו את זה.

3.9 תרגיל!. יהא V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$, ויהא $T:V\to V$ אופרטור המקיים $TT^*=T^2$. הוכח ש T צמוד לעצמו. הסק: $T^*=T \iff TT^*=T^2 \iff TT^*=(T^*)^2$. [רמז: דומה לתרגיל קודם. קח בסיס אורתונורמלי

B כך שהמטריצה $A:=[T]_B$ משולשית, והשווה את אברי האלכסון של AA^* עם אלו של A^2. הראה ש A אלכסונית וממשית]

3.10 תרגיל. **משפט הליכסון האוניטרי עבור מטריצות מרוכבות:** תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. הוכח שהטענות הבאות שקולות:

א. A נורמלית.

ב. קיימת מטריצה אוניטרית $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש $D=P^*AP$ היא מטריצה אלכסונית.

הדרכה: (א⇐ב) T_A (כפל ב A משמאל) נורמלית, לפי המשפט עבור אופרטורים יהיו B בסיס אורתונורמלי כך ש$[T_A]_B=[I]^S_B\cdot[T_A]^S_S\cdot[I]^B_S$ אלכסונית. אזי $P=[I]^B_S$ אוניטרית.

(ב⇐א) יהיו B בסיס אורתונורמלי כך ש $P=[I]^B_S$. המשך כמו קודם, רק בכיוון ההפוך.

כזכור, העתקה אוניטרית היא שומרת זויות, ולכן גם כפל במטריצה אוניטרית שומר זויות. בפרט, אם P מטריצה אוניטרית, אז $u\perp v \;\Leftrightarrow\; Pu\perp Pv$. בתרגילים הבאים נוכיח, שאם A נורמלית ו u,v הם וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים של A, אז $u\perp v$.

3.11 תרגיל. יהיו $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה, ו $B=P^{-1}AP$. הוכח:

א. v וקטור עצמי של B המתאים לערך עצמי λ אם ורק אם Pv וקטור עצמי של A המתאים לערך עצמי λ.

ב. v וקטור עצמי של A המתאים לערך עצמי λ אם ורק אם $P^{-1}v$ וקטור עצמי של B המתאים לערך עצמי λ.

3.12 תרגיל. תהא D מטריצה אלכסונית מהצורה $\alpha_1 I_{n_1}\oplus\ldots\oplus\alpha_k I_{n_k}$, כלומר n_1 אברי האלכסון הראשונים של D הם α_1, n_2 האיברים הבאים בתור הם α_2, וכולי.

א. מהם הערכים העצמיים של D?

ב. יהיו u,v וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים של D. הוכח ש $u\perp v$. [רמז: מצא בסיס נוח למרחב העצמי של כל ערך עצמי, והצג את הוקטור כצירוף לינארי של אברי בסיס זה]

3.13 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה נורמלית. ויהיו u,v וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים של A. הוכח: $u\perp v$. [רמז: תרגילים קודמים]

לכן, כדי לקבל ליכסון אוניטרי של מטריצה נורמלית, מספיק להפעיל תהליך גרם-שמידט על כל בסיס של מרחב עצמי **בנפרד**.

קיבלנו, איפוא, **אלגוריתם לליכסון אוניטרי של מטריצה**:

1. חשב את הפולינום האופייני $f_A(x)$.
2. מצא את שורשי $f_A(x)$, כלומר את הערכים העצמיים של A.
3. לכל ערך עצמי λ, חשב בסיס B_λ למרחב העצמי V_λ (ע"י דירוג המטריצה $A-\lambda I$). אם מספר הוקטורים שקיבלת קטן מהריבוי האלגברי של λ, המטריצה A אינה לכסינה ואפשר לעצור כאן.

4. הפעל על כל בסיס B_λ את תהליך גרם-שמידט (בגירסתו הנוחה ...), לקבלת בסיס $\widetilde{B}_\lambda$ אורתונורמלי עבור V_λ.
5. אסוף את כל וקטורי הבסיסים $\widetilde{B}_\lambda$ יחד, לקבלת בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.
6. שים את הוקטורים שהתקבלו בעמודות מטריצה P.

אזי P מטריצה אורתונורמלית המלכסנת את A.

3.14 תרגיל[!]. יהיו $A\in\mathbb{C}^{n\times n}, B\in\mathbb{C}^{m\times m}$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. המטריצה $A\oplus B$ לכסינה אוניטרית.

ב. המטריצות A,B לכסינות אוניטרית.

[רמז: משפט הליכסון האוניטרי עבור מטריצות]

כעת נעבור **למקרה הממשי**.

3.15 תרגיל. א. יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$, ו $T: V\to V$ אופרטור צמוד לעצמו. הוכח שכל הערכים העצמיים של T הם ממשיים. [רמז: $\langle T(v),v\rangle=\langle v,T(v)\rangle$ לכל v ובפרט כאשר v וקטור עצמי של T]

ב. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה צמודה לעצמה. הוכח שכל הערכים העצמיים של A הם ממשיים.

ג. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית שכל איבריה ממשיים. הוכח שכל הערכים העצמיים של A (מעל $\mathbb{C}$) הם ממשיים.

ד. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית. הוכח שהפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$. [רמז: יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ הערכים העצמיים של A מעל $\mathbb{C}$. אזי $f_A(x)=(x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)$. כעת השתמש ב(ג)]

3.16 תרגיל. הוכח את **משפט הליכסון האורתוגונלי**:

א. **(עבור אופרטורים)** יהא V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$, ויהא $T: V\to V$ אופרטור. אזי:

קיים בסיס אורתונורמלי B כך ש $[T]_B$ אלכסונית $\Leftrightarrow$ T צמוד לעצמו ($T^*=T$).

ב. **(עבור מטריצות)** תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. אזי:

A ניתנת לליכסון אורתוגונלי $\Leftrightarrow$ A סימטרית ($A^t=A$).

הדרכה: (א) נובע מ(ב) כרגיל. נוכיח את (ב).

($\Leftarrow$) אם $P^tAP=\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, אז $A^t=P\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P^t=A$.

($\Rightarrow$) השתמש בתרגיל הקודם יחד עם העובדה שמטריצה משולשית וסימטרית חייבת להיות אלכסונית.

במקרה הממשי הרבה יותר קל להוכיח את העובדה שוקטורים ממרחבים עצמיים שונים הם מאונכים.

3.17 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה אורתוגונלית (כלומר, סימטרית), ויהיו λ_1,λ_2 ערכים עצמיים שונים של A, עם וקטורים עצמיים v_1,v_2 בהתאמה. אזי v_1,v_2 אורתוגונלים. [רמז: הסבר את השוויונים הבאים $\lambda_2\langle v_1,v_2\rangle=\langle v_1,\lambda_2v_2\rangle=\langle v_1,Av_2\rangle=\langle v_1,A^tv_2\rangle=\langle Av_1,v_2\rangle=\langle\lambda_1v_1,v_2\rangle=\lambda_1\langle v_1,v_2\rangle$, והסק ש $\langle v_1,v_2\rangle=0$]

לכן, גם במקרה הממשי מספיק להפעיל תהליך גרם-שמידט על כל בסיס של מרחב עצמי בנפרד.

3.18 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. מצא מטריצה אורתוגונלית P כך ש PAP^t (לא P^tAP!) אלכסונית.

אנחנו יודעים שכל אופרטור צמוד לעצמו הוא נורמלי. מסתבר שמעל $\mathbb{R}$ גם ההיפך נכון, בתנאי מסויים.

3.19 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהא $T: V\to V$ אופרטור, כך שהפולינום $f_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. T נורמלי.

ב. T צמוד לעצמו.

[רמז: השתמש במשפט הלכסון האורתוגונלי]

3.20 תרגיל!. [מקור: גאומטריה] נסמן ב SO_3 את אוסף המטריצות 3×3 מעל $\mathbb{R}$ שהן אורתוגונליות ועם דטרמיננטה 1.

א. הראה ש SO_3 סגורה לכפל ולהופכי.

ב. הוכח שלכל מטריצה אורתוגונלית A ולכל ערך עצמי λ של A, $|\lambda|=1$. [רמז: לכסן את המטריצה מעל $\mathbb{C}$, והשתמש בנתון $AA^t=I$]

ג. הוכח שלכל מטריצה $A\in SO_3$ יש ערך עצמי $\lambda=1$. [רמז: אם אחד הערכים העצמיים λ הוא מרוכב, אז $\bar{\lambda}\neq\lambda$ אף הוא ערך עצמי. אם הערך העצמי הנותר הוא μ, אז $1=|A|=\lambda\bar{\lambda}\mu=|\lambda|^2\mu=\mu$]

3.21 תרגיל. נתון: T נורמלי; T,S מתחלפים מעל $\mathbb{C}$. הוכח:

א. לכל ו"ע u של T, $T^*Su=ST^*u$.

ב. T,S^* מתחלפים.

[רמז: נוכיח ישירות את (ב):

<u>דרך א</u>: לכסן אורתונורמלית את T, ובדוק מה נובע מהנתון $TS=ST$. ייתכן שתצטרך להוכיח את העובדה הבאה: לכל $a,b\in\mathbb{C}$, אם $ab=0$, אז גם $a\bar{b}=0$.

<u>דרך ב</u>: הוכח ראשית עבור מטריצות: הראה ש $\|ST^*-T^*S\|=0$, לפי המכפלה הפנימית מתרגיל 1.1(ג). עבור אופרטורים בדרך הרגילה (הצגה לפי בסיס אורתונורמלי)]

3.22 תרגיל. (השתמש בתרגיל 3.16) אם S,T נורמלים ומתחלפים מעל $\mathbb{C}$, אז $S+T$ וכן ST נורמלים.

3.23 תרגיל. T נורמלי מעל $\mathbb{C}$. הוכח:

א. T צמוד לעצמו $\Leftrightarrow$ $\sigma(T)\subseteq\mathbb{R}$.

ב. T אוניטרי $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda\in\sigma(T)(\ |\lambda|=1\ )$.

3.24 תרגיל. T צמוד לעצמו מעל $\mathbb{C}$.

א. הוכח ש $I-iT$ הפיך.

ב. נגדיר אופרטור $F=(I+iT)(I-iT)^{-1}$. הוכח ש F אוניטרי.

ג. בטא את T באמצעות F.

3.25 תרגיל*. T נורמלי. הוכח ש $im(T)=im(T^{*})$.

3.26 תרגיל. שורש של אופרטור: יהא T צמוד לעצמו. יהיו $\lambda_n, \dots, \lambda_1$ הערכים העצמיים של T (לאו דוקא שונים). הוכח:

א. $\langle Tv,v\rangle \geq 0$ לכל v $\Leftrightarrow$ כל $0 \leq \lambda_i$.

ב. אם $\langle Tv,v\rangle \geq 0$ לכל v, אז קיים S צמוד לעצמו כך ש $S^2=T$.

3.27 תרגיל. T נורמלי. הוכח שקיימים S צמוד לעצמו עם ערכים עצמיים $0\leq$ ו U אוניטרי כך ש $T=SU=US$.

3.28 תרגיל. תהא A מטריצה נורמלית מעל $\mathbb{C}$, ויהא f פולינום מעל $\mathbb{C}$. הוכח ש $f(A)$ שקולה אוניטרית למטריצה $\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & . \\ . & & & . \\ . & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$ כאשר $\lambda_n, \dots, \lambda_1$ הם הערכים העצמיים של A.

3.29 תרגיל. T נורמלי מעל $\mathbb{C}$. הוכח שלכל פולינום f , $f(T)$ נורמלי.

3.30 תרגיל. מעל $\mathbb{C}$:

א. הוכח: $(\forall v\in V)\|Tv\|\leq\|v\| \;\Leftrightarrow\; |\lambda|\leq 1$ לכל ערך עצמי λ של $T^{*}T$.

ב. תן דוגמא שבה $|\lambda|\leq 1$ לכל ערך עצמי של T, ובכל זאת לא מתקיים $\|Tv\|\leq\|v\|$ לכל $v\in V$.

3.31 תרגיל. T נורמלי מעל $\mathbb{C}$. הוכח:

א. לכל u, $\|Tu\|=\|T^{*}u\|$. [רמז: הגדרת הנורמה המושרית]

ב. אם $T^2u=0$, אז $Tu=0$. [רמז: ליכסון]

ג. הסק כי $\ker(T)=\ker(T^n)$ לכל n.

3.32 תרגיל. אם T אנטי-צמוד (כלומר $T^{*}=-T$), אז לכל $\lambda\in\sigma(T)$, λ מדומה (כלומר $\lambda\in i\mathbb{R}$).

פרק יא*: מרחבי מנה (רשות)

מרחבי מנה הם כלי נוח להסתכלות על מרחב וקטורי כאשר "מנטרלים" הבדלים בין וקטורים שאינם מעניינים אותנו. התוצאה היא הוכחות אלגנטיות יותר, והבנה עמוקה יותר. הרעיון המופיע בפרק זה משמש בוריאציות שונות בניתוח סוגים רבים של מבנים אלגבריים.

עבור V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ו U תת-מרחב של V, מגדירים את **מרחב המנה** V/U בצורה הבאה:

- עבור $v\in V$, נסמן $v+U:=\{v+u\ :\ u\in U\}$. אזי $V/U:=\{v+U\ :\ v\in V\}$.
- סכום וקטורים: $(v_1+U)+(v_2+U):=(v_1+v_2)+U$.
- כפל בסקלר: $\alpha(v+U):=\alpha v+U$.

1 תרגיל. יהיו $V=(\mathbb{Z}_3)^2$, ו $U=\{(a,0)\ :\ a\in\mathbb{Z}_3\}$. כתוב במפורש את אברי מרחב המנה V/U (שים לב, כל איבר במרחב המנה הוא קבוצה). בחר שני איברים במרחב שקיבלת וחשב את סכומם.

2 תרגיל. [א. הוכח שמרחב מנה הוא מרחב וקטורי]

ב. הוכח: $v_1+U=v_2+U\ \Leftrightarrow\ v_1-v_2\in U$.

3 תרגיל. א. יהא W תת-מרחב של V המכיל את U. הוכח ש W/U תת-מרחב של V/U.

ב. הראה שלכל תת-מרחב Y של V/U יש תת-מרחב X של V עבורו $X/U=Y$. [רמז: קח $X=\{v\ :\ v+U\in Y\}$]

4 תרגיל. יהיו U, V מרחבים וקטוריים. הוכח: $(U\times V)/(\{0_U\}\times V)=U\times\{0_V\}$.

5 תרגיל. הוכח את הטענות הבאות:

א. יהיו X, Y תת-מרחבים של V, ויהא $Z\subseteq X\cap Y$ תת-מרחב. אזי $(X+Y)/Z=X/Z+Y/Z$.

ב. $(X+Y)/X\cap Y=(X/X\cap Y)\oplus(Y/X\cap Y)$. [הדרכה: אם $x+X\cap Y=y+X\cap Y$, אז $x-y\in X\cap Y$, לכן יש $a\in X\cap Y$ כך ש $x-y=a$, לכן $x=y+a\in X\cap Y$ ולכן $x+X\cap Y=0+X\cap Y$]

6 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה סופי, ויהא U תת-מרחב של V. הוכח: $\#(V/U)=\#V/\#U$.
[רמז: קח בסיס עבור U והשלם אותו לבסיס עבור V]

7 תרגיל. **הוכחה אלגאנטית של משפט המימדים**: הוכח את הטענות הבאות.

א. אם $V=U\oplus W$, אז $\dim(V)=\dim(U)+\dim(W)$. [רמז: הוכח שאם B_1 בסיס עבור U ו B_2 בסיס עבור W, אזי $B_1\cup B_2$ בסיס עבור V]

ב. $\dim(V/W)=\dim(V)-\dim(W)$.

ג. $\dim((U+W)/(U\cap W))=\dim(U)+\dim(W)-2\dim(U\cap W)$. [רמז: תרגיל מסויים בנושא "סכומים של מרחבים"]

ד. הסק את משפט המימדים: $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$.

8 תרגיל. תהא $T:V\to W$ העתקה לינארית, ונסמן $N=\ker(T)$. **נגדיר** $\tilde{T}:V/N\to W$ **לפי** $\tilde{T}(v+N):=T(v)$.

א. הוכח ש $\tilde{T}$ מוגדרת היטב, כלומר: אם $v+N=u+N$, אזי $\tilde{T}(v+N)=\tilde{T}(u+N)$.

ב. הוכח ש $\tilde{T}$ חד-חד ערכית.

ג. הוכח בעזרת (ב) את **משפט הדרגה של העתקה לינארית**: $\nu(T)+\operatorname{rank}(T)=\dim(V)$. [רמז: לפי תרגיל מסויים בנושא מרחבי מנה, $\dim(V/U)=\dim(V)-\dim(U)$]

ד. הוכח את **משפט האיזומורפיזם**: אם $T:V\to W$ אפימורפיזם, אזי $\tilde{T}:V/\ker(T)\to W$ איזומורפיזם.

9 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ויהא $W\subseteq V$. הוכח: $(V/W)^*\cong\{\varphi\in V^* : \varphi|_W=O\}$.

פרק יב: פרקים נוספים

ישנם נושאים נוספים באלגברה לינארית, שלא כיסינו בחוברת זאת. ביניהם ניתן למצוא:

חבורות וחוגים: נושא זה מאפשר להציג את המינוח שדה בצורה הדרגתית. נושא זה יידון בהרחבה בקורסים מבנים אלגבריים, תורת החוגים, ועוד.

צורות קנוניות: נושא זה כוסה בצורה חלקית. בפרט, לא כיסינו את הנושא של צורת ג'ורדן.

תבניות בילינאריות: נושא זה אמור להיות מכוסה בקורס בגאומטריה.

התלמיד הרציני – ראוי שילמד לפחות את שני הנושאים האחרונים בצורה עצמאית (הם מופיעים כמעט בכל ספר באלגברה לינארית, ובפרט בספר הפופולרי-מאוד מסדרת Schaum).

פרק יג: בנק בחינות

במהדורה זו בחרנו להקל על כיסו ועל גבו של התלמיד, ולא לכלול עותקים של בחינות משנים עברו.

אף על פי כן, הבחינות חשובות מאד לתירגול נוסף, ולשם כך נפנה את הקורא לכתובות הבאות (כל כתובת כוללת בחינות משנים אחרות):

א. קלסר הבחינות באלגברה לינארית בספרית המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת בר-אילן.

ב. **בחינות באתר האינטרנט** http://www.math.biu.ac.il/lectures

ג. **בחינות באתר שלנו** http://www.math.biu.ac.il/~tsaban

אני מאחל לך הצלחה בבחינה, והבנה טובה של החומר שתסייע לך גם בקורסים הבאים.

בועז צבאן