משפט ג׳ורדן

עבור מטריצות : תהי $A\in F^{nxn}$ כך ש- $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אזי קיימת מטריצה הפיכה $P\in F^{nxn}$ כך ש- $P^{-1}AP$ בצורת ג׳ורדן.

עבור אופרטורים : יהי $T:V\longrightarrow V$ אופרטור לינארי כך ש- $P_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אזי קיים בסיס B של V כך ש- $[T]_B$ בצורת ג׳ורדן.

סקירה כללית של הוכחת המשפט עבור אופרטורים

המרחב העצמי המוכלל של ערך עצמי λ_i , המסומן ב- K_{λ_i} , הוא $K_{\lambda_i}=Ker(T-\lambda_i I)^n$, באשר n הוא מימד המרחב V.

ממשפט הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים, היות ו- $P_T(x)$ מל״ל, אם נסמן אותו

$P_T(x)=(x-\lambda_1)^{a_1}\cdot...\cdot(x-\lambda_k)^{a_k}$ (הע״ע שונים) אזי מתקיים $V=K_{\lambda_1}\oplus....\oplus K_{\lambda_k}$. לכל ע״ע λ_i נתבונן באופרטור $(T-\lambda_i I)|_{K_{\lambda_i}}$, והוא נילפוטנטי על K_{λ_i} .

משפט ג׳ורדן הנילפוטנטי : לכל אופרטור $T:V\longrightarrow V$ נילפטונטי קיים בסיס מג׳רדן יחיד B. בצורת הג׳ורדן יש רק אפסים באלכסון, כי רק 0 הוא ע״ע של אופרטור נילפוטנטי.

אם נסמן את סדר הנילפוטנטיות ב-k, נשים לב כי מתקיים $Im(T^{k-1})\subseteq KerT$, ולכן מתקבלת השרשרת הבאה : $Im(T^{k-1})\subseteq Im(T^{k-2})\bigcap KerT\subseteq...\subseteq Im(T)\bigcap KerT\subseteq KerT$.

ניקח בסיס של $Im(T^{k-1})$, נשלימו לבסיס של $Im(T^{k-2})\bigcap KerT$, ונמשיך כך עד שנגיע לבסיס של הגרעין. מתקבל כי איחוד כל המסלולים שמסתיימים בוקטורי הבסיס שלKerT הוא בסיס מג׳רדן, שכן ההצגה של T לפי בסיס כלשהו C היא בלוק ג׳ורדן יחיד בגודל m אם ורק ואם C הוא מסלול מאורך m. קבוצה זו היא בלתי תלויה ופורשת, ולכן היא בסיס שיביא את האופרטור הנילפונטטי לצורת ג׳ורדן. חשוב לרשום כל אחד מהמסלולים מהחזקה הגבוה ביותר של T עד לוקטור עצמו משמאל לימין ולא להפך, אחרת ייצאו בלוקים משוחלפים.

יחידות : אם k הוא סדר הנילפוטניות, לכל j בין 1 ל-k מספר הבלוקים מגודל גדול מ-j הוא $dim(KerT\bigcap ImT^j)$, ולכן נובע ישירות כי מספר הבלוקים מגודל j הוא $dim(KerT\bigcap Im(T^{j-1})-dim(KerT\bigcap Im(T^j)$ ולכן נקבע באופן יחיד. גודל הבלוקים נקבע בצורה יחידה לפי אורך המסלולים. לכן צורת הג׳ורדן יחידה עד כדי סדר הבלוקים, שכן אם נשנה את סדר המסלולים סדר הבלוקים יישתנה בהתאם.

לסיכום, לכל אופרטור נילפוטנטי קיים בסיס B כך שהצגת האופרטור בו היא בצורת ג׳ורדן, וצורה זו יחידה עד כדי סדר בלוקי הג׳ורדן.
בפרט, משפט ג׳ורדן הנילפונטטי נכון עבור האופרטור המוזכר לעיל $(T-\lambda_i I)|_{K_{\lambda_i}}$.

לכן קיים בסיס B_i כך שהמטריצה $[(T-\lambda_i I)|_{K_{\lambda_i}}]_{B_i}$ היא בצורת ג׳ורדן, וצורה זו יחידה עד סדר בלוקים. אבל מתקיים: $[T|_{K_{\lambda_i}}]_{B_i}=[(T-\lambda_i I+\lambda_i I)|_{K_{\lambda_i}}]_{B_i}=[(T-\lambda_i I)|_{K_{\lambda_i}}]_{B_i}+[\lambda_i I|_{K_{\lambda_i}}]_{B_i}=[(T-\lambda_i I)|_{K_{\lambda_i}}]_{B_i}+\lambda_i I$

כלומר בסופו של דבר הגענו למטריצה בצורת ג׳ורדן ועוד מטריצת היחידה עם הע״ע באלכסון, ולכן גם זו צורת ג׳ורדן, והיא יחידה עד כדי סדר בלוקים. לכן גם לאופרטור $T|_{K_{\lambda_i}}$ יש צורת ג׳ורדן, והיא יחידה עד כדי סדר בלוקים. הדבר נכון לכלi בין 1 ל-k, ולכן לכל ע״ע של האופרטור. כלומר, קיימים בסיסים $B_1,...,B_k$ כך שכל בסיס מתאים מג׳רדן את האופרטור שמצומצם על המרחב העצמי המוכלל המתאים.

המרחבים העצמיים המוכללים הם אינווריאנטיים, לכן איחוד הבסיסים $\bigcup B_i$ הוא בסיס של V, ולפי האמור הוא מביא את האופרטור שממנו התחלנו לצורת אלכסונית-בלוקים, כאשר כל בלוק הוא בצורת ג׳ורדן עם הע״ע המתאים, ולכן הוא מג׳רדן את האופרטור.

<u>כללים חשובים בנושא צורות ג׳ורדן</u>

* לכל ע״ע λ , הבלוק הכי גדול בצורת הג׳ורדן הוא המעלה של הגורם $x-\lambda$ בפולינום המינימלי.

* מספר הבלוקים של כל ע״ע λ הוא הריבוי הגאומטרי של λ .

* סכום גדלי הבלוקים של כל ע״ע λ הוא מעלת הגורם $x-\lambda$ בפולינום האופייני.