

כל בסיס של V^* הוא דואלי לבסיס של V

בועז צבאן

24 בינואר 2013

נשלים כאן את הוכחת המסקנה שצוטטה בסוף השיעור.

מסקנה 0.1 כל בסיס של V^* הוא דואלי לאיזשהו בסיס של V : אם $C = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ בסיס של V^* , אז עבור הבסיס $\{\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n\} :=$ של $C^* = \{v_1, \dots, v_n\}^*$ מתקיים $C = \{v_1, \dots, v_n\}^*$.

הוכחה: נותר רק לפרט. יהי C^* הבסיס של V^{**} הדואלי לבסיס C .

מהמשפט על האיזומורפיזם הטבעי מ V ל V^{**} , אנו יודעים שכל איבר של V^{**} הוא מהצורה \widehat{v} לאיזשהו $v \in V$. לכן, יש $v_1, \dots, v_n \in V$ כך ש $C^* = \{\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n\}$. הגדרת המושג " C^* הוא הבסיס הדואלי ל C " אומרת שלכל $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\widehat{v}_i(\varphi_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

מהגדרת הוקטורים \widehat{v} ,

$$\varphi_j(v_i) = \widehat{v}_i(\varphi_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

וזהי הגדרת המושג " C^* הוא הבסיס הדואלי ל $\{v_1, \dots, v_n\}$ ".

■