שיעור - לינארית 2

<u>תזכורת</u>: אופרטור T יקרא נורמלי אם $T^*T=TT^*$.

<u>משפט</u>: יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. אם T נורמלי ו-$P_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים (מעל $\mathbb{F}$) אז T ניתן ללכסון אוניטרי.
כלומר, קיים בסיס B א"נ כך ש $[T]_B$ אלכסונית.

<u>אפילו</u> גם הכיוון ההפוך נכון.

כלומר:
יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי אזי T ניתן ללכסון אוניטרי אמ"מ T נורמלי ו-$P_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

<u>הוכחה</u>: $(\Leftarrow)$ המשפט.
$(\Rightarrow)$ T ניתן ללכסון אוניטרי לכן בפרט ניתן ללכסון ולכן הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים.
בנוסף קיים B בסיס א"נ כך ש $[T]_B$ אלכסונית.
אבל $[T]_B$ אלכסונית $\Leftarrow$ $[T]_B^*=\overline{[T]_B}$ אלכסונית.
מכיוון שכל שתי מטריצות אלכסוניות מתחלפות

$$[T]_B[T]_B^*=[T]_B^*[T]_B$$

כלומר $[T]_B$ מטריצה נורמלית $\Leftarrow$ T נורמלית ∎

<u>משפט הלכסון האוניטרי עבור מטריצות:</u>
תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ אזי: A לכסינה אוניטרית אמ"מ A נורמלית והפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים.

הוכחה: (⇐) נתון A לכסינה אוניטרית. מכאן A לכסינה ⇐ $P_A(x)$ מתפרק
לגורמים ליניאריים.

כמו כן, ידוע ש P אוניטרית כך ש $P^*AP = D$ אלכסונית ⇐

$A = PDP^*$ ⇐ $A^* = PD^*P^*$

לכן $AA^* = (PDP^*)(PD^*P^*) = PDD^*P^* \underset{\uparrow}{=} PD^*DP = PD^*P^*PDP^*$
$= A^*A$ ‏ D, D^* אלכסוניות, מתחלפות

לכן A נורמלית.

(לחילופין, ידוע P אוניטרית כך ש $P^*AP = P^{-1}AP$ אלכסונית.
אבל P אוניטרית לכן עמודותיה מהוות בסיס א"נ B.
ברור כי $P = [I]_E^B$ לכן

$P^*AP = [I]_B^E [L_A]_E [I]_E^B = [L_A]_B$ אלכסונית

לכן L_A לכסין אוניטרית ⇐ $P_{L_A}(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים
וכן L_A נורמלי ⇐ $P_A(x)$ " " " וכן A נורמלית)

(⇒) יהי $L_A: F^n \to F^n$ האופרטור הליניארי המוגדר ע"י $L_A(v) = Av$.
אזי $[L_A]_E = A$, כאשר E הבסיס הסטנדרטי.
מכיוון ש E בסיס א"נ ! $[L_A]_E = A$ נורמלית, L_A אופרטור
נורמלי. כמו כן $P_A(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים ⇐ $P_{L_A}(x)$ מתפרק
לגורמים ליניאריים. לכן L_A אופרטור לכסין אוניטרית, כלומר קיים B
בסיס א"נ כך ש $[L_A]_B$ אלכסונית. אבל

$$[L_A]_B = [I]_B^E [L_A]_E [I]_E^B = ([I]_E^B)^{-1} A [I]_E^B$$

נסמן $P=[I]_E^B$. ידוע $P^{-1}AP$ אלכסונית.

אבל B,E בסיסים א"נ לכן $P=[I]_E^B$ אוניטרית.

לכן $P^{-1}AP$ לכסון אוניטרי של A.

<u>הערה</u>: עבור מטריצה A נורמלית עם פולינום אופייני מתפרק לגורמים לינאריים על מנת למצוא מטריצה P אוניטרית המלכסנת את A, יש צורך בבסיס א"נ של ו"ע של A. (עמודות P יהיו איברי הבסיס הזה)

איך מוצאים כזה?

(א) מוצאים ע"ע.

(ב) לכל ע"ע λ מוצאים בסיס למרחב העצמי V_λ. באמצעות גרם שמידט עוברים לבסיס א"נ B_λ.

(ג) ניקח $B=\bigcup_{\lambda} B_\lambda$ (ע"ע λ) ונקבל B בסיס א"נ של ו"ע.

(B א"נ כי ו"ע של ע"ע שונים מאונכים זה לזה).

<u>הערה</u>: מעל $\mathbb{C}$:

(א) אופרטור הוא נורמלי $\Leftrightarrow$ לכסין אוניטרית

(ב) מטריצה היא נורמלית $\Leftrightarrow$ לכסינה אוניטרית.

<u>הסבר</u>: מעל $\mathbb{C}$ הפולינום האופייני תמיד מתפרק לגורמים לינאריים ולכן ניתן להוריד דרישה זו במשפט.

כעת נתמקד במקרה $\mathbb{F}=\mathbb{R}$:

<u>הגדרה</u>: אופרטור/מטריצה אוניטרי/ת מעל $\mathbb{R}$ נקרא/ת אורתוגונלי/ת.

(שים לב: מעל $\mathbb{R}$ $A^*=A^t$).

המשך

<u>משפט הלכסון האורתוגונלי עבור מטריצות</u>

תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ אזי A ניתנת ללכסון אורתוגונלי, כלומר קיימת $P\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ אורתוגונלית כך ש $P^{-1}AP=P^tAP$ אלכסונית, אמ"מ A סימטרית.

<u>הוכחה</u>: $(\Leftarrow)$ אם A ניתנת ללכסון אורתוגונלי אז קיימת P אורתוגונלית כך ש

$P^tAP=D$ אלכסונית $\Leftarrow$

$$A=PDP^t$$

נראה:
$$A^t=(PDP^t)^t=PD^tP^t\underset{D\text{ אלכסונית}}{=}PDP^t=A$$

לכן A סימטרית.

$(\Rightarrow)$ A סימטרית לכן $A^*=A^t=A$ לכן A צמודה לעצמה ובפרט נורמלית.

מכאן הפולינום האופייני $P_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$.

כלומר $P_A(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$ כאשר λ_i-ות הע"ע.

אבל A צמודה לעצמה לכן כל הע"ע λ_i-ות ממשיים לכן

$P_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$.

לכן, לפי משפט הלכסון האוניטרי עבור מטריצות קיימת $P\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ אוניטרית ולכן אורתוגונלית כך ש

$P^{-1}AP=P^*AP\underset{\text{מעל }\mathbb{R}}{=}P^tAP$ אלכסונית כנדרש.

סמ"ך

<u>הגדרה:</u> אופרטור ממשי T נקרא לכסין אורתוגונלית אם קיים בסיס א"נ B כך ש $[T]_B$ אלכסונית.

<u>משפט הלכסון האורתוגונלי עבור אופרטורים</u>

יהי T אופרטור מעל $\mathbb{R}$. אזי T צמוד לעצמו אמ"ם T ניתן ללכסון אורתוגונלי.

<u>הוכחה:</u> $(\Leftarrow)$ יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס א"נ של V.

אזי T צמוד לעצמו $\Leftarrow$ $[T]_B$ צמודה לעצמה. כלומר

$$[T]_B^t=[T]_B^*=[T]_B$$

לכן $[T]_B$ מטריצה ממשית סימטרית

לפי המשפט הקודם $[T]_B$ לכסינה אורתוגונלית. כלומר, קיימת P אורתוגונלית כך ש

$P^{-1}[T]_BP=P^t[T]_BP$ אלכסונית.

<u>נראה</u> קיים בסיס א"נ B_1 כך ש $P=[I]_B^{B_1}$

<u>הוכחה:</u> לכל $1\le j\le n$ נגדיר

$$u_j=\sum_{i=1}^n p_{ij}v_i$$

אזי

$$[u_j]_B=\begin{pmatrix}p_{1j}\\p_{2j}\\\vdots\\p_{nj}\end{pmatrix}=C_j(P)$$

לכן, נראה: $B_1=\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס א"נ (ואז $P=([u_1]_B\cdots[u_n]_B)$ $(=[I]_B^{B_1})$.

אכן:

$$\langle u_i,u_j\rangle \underset{B \text{ בסיס א"נ}}{=} [u_i]_B^t[u_j]_B \underset{\mathbb{R}^n \text{ המכפלה הסטנדרטית ב}}{=} \langle [u_i]_B,[u_j]_B\rangle$$

$$=\langle C_i(P),C_j(P)\rangle \underset{P \text{ אורתוגונלית}}{=} \begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

לכן $B_1=\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס א"נ ! $P=[I]_B^{B_1}$

לכן: $P^{-1}[T]_BP=[I]_{B_1}^{B}[T]_B[I]_B^{B_1}=[T]_{B_1}^{B_1}$ אלכסונית

! B_1 אורתונורמלי לכן לפי הגדרה T ניתנת ללכסון אורתוגונלי.

($\Leftarrow$) נניח T ניתן ללכסון אורתוגונלי לכן קיים בסיס אורתונורמלי B כך ש-

$[T]_B$ אלכסונית. לכן: $[T]_B^*=[T]_B^t=[T]_B$

כלומר $[T]_B$ צמודה לעצמה $\Leftarrow$ T צמוד לעצמו.

<u>הערה</u>: עבור אופרטור ממש צמוד לעצמו, איך מוצאים בסיס אורתוגונלי שמלכסן את T?

בדוק כמו מקודם - מפעלים גרם שמידט על כל אחד מהבסיסים של המרחבים העצמיים.

נקבל - בסיס B א"נ של ו"ע.

מכיון שהבסיס הוא של ו"ע $[T]_B$ אלכסונית.

מכיון ש B א"נ. $[T]_B$ לכסין אורתוגונלי.

<u>מסקנה</u>: תהי A מטריצה ממשית (אופרטור ממש) כך ש $P_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אז: A נורמלית אמ"מ A צמודה לעצמה (=סימטרית).

<u>הוכחה</u>: נניח כי $P_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים לכן לפי משפט הלכסון האוניטרי

A נורמלית $\Leftrightarrow$ A ניתנת ללכסון אורתוגונלי (אוניטרי מעל $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow$ A סימטרית.

מש"ל

המשך

הערה: כשהשדה שעליו אנחנו עובדים הוא $\mathbb{R}$

לכסון אורתוגונלי = לכסון אוניטרי.

אבל, אם השדה הזה הוא $\mathbb{C}$ יכולה להיות מטריצה ממשית

$A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\subseteq M_{n\times n}(\mathbb{C})$ הניתנת ללכסון אוניטרי.

(כלומר, קיימת $P\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ אוניטרית כך ש P^*AP אלכסונית)

אבל מעל $\mathbb{R}$ אינה ניתנת ללכסון.

דוגמה: $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

מעל $\mathbb{R}$: הפולינום האופייני $P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$

לא מתפרק לגורמים לינאריים ולכן A לא ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{R}$.

מעל $\mathbb{C}$: $A^*=A^t=-A$ לכן אנטי סימטרית ולכן נורמלית.

לכן A ניתנת ללכסון אוניטרי.

הערה: אם $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{R}$ אז A ניתנת ללכסון אוניטרי מעל $\mathbb{C}$ אמ"מ היא ניתנת ללכסון (אוניטרי =) אורתוגונלי מעל $\mathbb{R}$.

הוכחה: A ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{R}$ לכן הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים. לכן:

$P_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, A ממשית

A ניתנת ללכסון אוניטרי מעל $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ A נורמלית $\overset{1}{\Leftrightarrow}$ A במקרה הזה

(= סימטרית $\Leftrightarrow$ A ניתנת ללכסון אורתוגונלי מעל $\mathbb{R}$.