השלמה להרצאה בנושא משפט השילוש

בועז צבאן

11 בנובמבר 2012

משפט השילוש של מטריצה. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים. אזי A דומה למטריצה משולשית עליונה.

בהוכחת המשפט, נשתמש בתכונות בסיסיות של כפל מטריצות בלוקים. התכונה הראשונה נובעת ישירות מהגדרת כפל מטריצות (או, אולי יותר אלגנטי, מכפל שורה־שורה וכפל עמודה עמודה), והתכונה השניה נובעת מהראשונה:

1. אם סדרי המטריצות A, B, C, D, E, F, G, H הם כך שכל המכפלות באגף ימין מוגדרות, אז אגף ימין שווה לאגף שמאל במשוואה

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix}.$$

2. אם A, B ריבועיות הפיכות, אז $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ (בפרט, המטריצה הפיכה).

הוכחה: ניתן למשפט שתי הוכחות, עם הבדל קל ביניהן. שתי ההוכחות הן באינדוקציה על n. עבור $n = 1$ המטריצה כבר משולשית (אפילו אלכסונית) ולכן הטענה נכונה. נראה שתי דרכים אפשריות להמשיך.

דרך א: נניח את נכונות המשפט עבור מטריצות $n \times n$ ונוכיחו עבור מטריצות $(n+1) \times (n+1)$.

$p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, ובפרט יש לו שורש λ. כיון ש λ שורש של $p_A(x)$, λ הוא ערך עצמי של A. יהי v וקטור עצמי של A המתאים ל λ.

נשלים את v לבסיס $v, v_1, \ldots, v_n$ של $\mathbb{F}^{n+1}$. תהי $P = (v, v_1, \ldots, v_n)$ המטריצה שעמודותיה הן אברי הבסיס. בעזרת כפל עמודה־עמודה (פעמיים), נקבל:

$$P^{-1}AP = P^{-1}A(v, *, \ldots, *) = P^{-1}(Av, *, \ldots, *) = P^{-1}(\lambda v, *, \ldots, *) = \left(P^{-1}\lambda v, *, \ldots, *\right) =$$
$$= \left(\lambda P^{-1} v, *, \ldots, *\right) = (\lambda e_1, *, \ldots, *) = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

כאשר $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. כיון ש A דומה למטריצה שקיבלנו בחישוב הפולינום האופייני שלהן שווה, ולכן

$$p_A(x) = (x-\lambda)p_B(x).$$

נתון שאגף שמאל מתפרק לגורמים לינאריים, ולכן גם אגף ימין. לכן, $p_B(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. לכן, אפשר להפעיל את הנחת האינדוקציה על B.

מהנחת האינדוקציה, יש מטריצה הפיכה $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך שהמטריצה $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}$ היא משולשית עליונה. תהי

$$R = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

אזי R הפיכה כמכפלת מטריצות הפיכות, ומתקיים

$$R^{-1}AR=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&Q&\\0&&&\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&Q&\\0&&&\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&Q&\\0&&&\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda&*&\cdots&*\\0&&&\\\vdots&&B&\\0&&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&Q&\\0&&&\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&Q^{-1}&\\0&&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&*&\cdots&*\\0&&&\\\vdots&&B&\\0&&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&Q&\\0&&&\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda&*&\cdots&*\\0&&&\\\vdots&&Q^{-1}BQ&\\0&&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&*&\cdots&*\\0&*&\cdots&*\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&&&*\end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית עליונה. **מש"ל**

דרך ב: נניח את נכונות המשפט עבור מטריצות $n\times n$ או קטנות יותר, ונוכיח עבור מטריצות $(n+1)\times(n+1)$.

$p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, ובפרט יש לו שורש λ. כיון ש λ שורש של $p_A(x)$, λ הוא ערך עצמי של A, לכן, יש ל A לפחות וקטור עצמי אחד.

תהי $\{v_1,\ldots,v_k\}$ **קבוצת וקטורים עצמיים בת"ל מקסימלית** של A, כלומר: כל איבר בקבוצה הוא וקטור עצמי, הקבוצה בת"ל, ואי אפשר להוסיף עוד ו"ע לקבוצה ולהשאירה בת"ל.

נסמן ב $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ את הערכים העצמיים המתאימים ל $v_1,\ldots,v_k$. ($\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ הם לאו דווקא שונים זה מזה.)

נשלים את $v_1,\ldots,v_k$ לבסיס $v_1,\ldots,v_k,\ldots,v_{n+1}$ של $\mathbb{F}^{n+1}$. תהי $P=(v_1,\ldots,v_{n+1})$ המטריצה שעמודותיה הן אברי הבסיס. בעזרת כפל עמודה־עמודה (פעמיים), נקבל:

$$P^{-1}AP=P^{-1}A\left(v_1,\ldots,v_k,*,\ldots,*\right)=P^{-1}\left(Av_1,\ldots,Av_k,*,\ldots,*\right)=P^{-1}\left(\lambda_1v_1,\ldots,\lambda_kv_k,*,\ldots,*\right)=$$
$$=\left(P^{-1}\lambda_1v_1,\ldots,P^{-1}\lambda_kv_k,*,\ldots,*\right)=\left(\lambda_1P^{-1}v_1,\ldots,\lambda_kP^{-1}v_k,*,\ldots,*\right)=\left(\lambda_1e_1,\ldots,\lambda_ke_k,*,\ldots,*\right)=$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0&*\\0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\0&\cdots&0&\lambda_k&*\\O&\cdots&\cdots&O&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D&*\\O&B\end{pmatrix},$$

כאשר B מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$ או פחות ו $D\in\mathbb{F}^{k\times k}$ מטריצה אלכסונית.

כיון ש A דומה למטריצה שקיבלנו בחישוב הפולינום האופייני שלהן שווה, ולכן

$$p_A(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)p_B(x).$$

נתון שאגף שמאל מתפרק לגורמים לינאריים, ולכן גם אגף ימין. לכן, $p_B(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. לכן, אפשר להפעיל את הנחת האינדוקציה על B.

מהנחת האינדוקציה, יש מטריצה הפיכה $Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך שהמטריצה $M=Q^{-1}BQ$ היא משולשית עליונה. תהי

$$R=P\begin{pmatrix}I&O\\O&Q\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{(n+1)\times(n+1)}$$

כאשר $I\in\mathbb{F}^{k\times k}$ היא מטריצת הזהות. אזי R הפיכה כמכפלת מטריצות הפיכות, ומתקיים

$$R^{-1}AR=\begin{pmatrix}I&O\\O&Q\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix}I&O\\O&Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I&O\\O&Q\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}D&*\\O&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&O\\O&Q\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}I&O\\O&Q^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D&*\\O&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&O\\O&Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D&*\\O&Q^{-1}BQ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D&*\\O&M\end{pmatrix}$$

כיון ש D אלכסונית ו M משולשית עליונה, קיבלנו ש $R^{-1}AR$ מטריצה משולשית עליונה. **מש"ל**

בצורה מאד שטחית, אפשר לומר כי ההוכחה הראשונה היא בסגנון של "מתמטיקה עיונית", בעוד שהשניה היא בסגנון של "מתמטיקה שימושית".

שאלה למחשבה: מה תרמה לנו האריכות בהוכחה השניה? הרי, בסופו של דבר, שתי ההוכחות הוכיחו את אותו המשפט.