אופרטור הסיבוב בזוית α

בועז צבאן

8 בינואר 2013

נזכור שאופרטור הוא אוניטרי אם ורק אם הוא שומר נורמות. דוגמא לאופרטור כזה הוא אופרטור הסיבוב בזוית α: תהי $T_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ סיבוב בזוית α נגד כיוון השעון. זו העתקה לינארית (קל לוודא), וברור, מבחינת המשמעות שלה שהיא שומרת נורמות. נחשב את ההצגה שלה לפי הבסיסים הסטנדרטיים.

$T_\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$: סיבוב של $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ בזוית α נגד כיוון השעון, ציירו וודאו:

$T_\alpha(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$: סיבוב של $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ בזוית α נגד כיוון השעון, ציירו וודאו:

לכן, ההצגה לפי הבסיס הסטנדרטי (בתחום וגם בטווח) היא $[T_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (לכל זוית α).

בונוס: הוכחת נוסחאות הסינוס והקוסינוס

זוכרים שבבית הספר היתה לכם נוסחה ל $\sin(\alpha \pm \beta)$ ול $\cos(\alpha \pm \beta)$? אם תחשבו טוב, תגלו שלימדו אתכם את הנוסחה מבלי להוכיחה. כן, מביך, מעולם לא ראיתם הוכחה לזה, והשתמשתם בזה המון.

לא עוד! נראה כאן הוכחה ממש יפה לנוסחאות האלה, בעזרת אלגברה לינארית.

סיבוב (נגד כיוון השעון) בזוית $\alpha + \beta$ זהה להפעלת סיבוב (נגד כיוון השעון) בזוית β ואחריה סיבוב (נגד כיוון השעון) בזוית α, כלומר: $T_{\alpha+\beta} = T_\alpha T_\beta$. לכן, ההצגות לפי הבסיס הסטנדרטי מקיימות

$$[T_{\alpha+\beta}] = [T_\alpha T_\beta] = [T_\alpha] \cdot [T_\beta].$$

נציב את ההצגות ונקבל:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & * \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ומהשוואת רכיבי המטריצות בעמודה הראשונה, נקבל

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

את הנוסחאות עבור $\sin(\alpha-\beta), \cos(\alpha-\beta)$ אפשר לקבל מנוסחות אלה, כיון ש $\cos(-\beta) = \cos\beta$ ו $\sin(-\beta) = -\sin\beta$.

סבבה?