השלמה להרצאה בנושא מכפלות פנימיות

בועז צבאן

25 בדצמבר 2012

תזכורת: אם $B=\{w_1,\ldots,w_k\}$ בסיס אורתונורמלי של מרחב מכפלה פנימית W, אז לכל וקטור $w=\alpha_1 w_1+\cdots+\alpha_k w_k\in W$ מתקיים $\langle w,w_i\rangle=\alpha_i$ (לכל $i=1,\ldots,k$).

למה 0.1 יהיו V מרחב מכפלה פנימית, W תת־מרחב של V, B בסיס אורתוגונלי של W. אזי:

$v-\pi_B(v)\in W^\perp$.

הוכחה: ראינו כבר שכפל אברי B בסקלרים שונים מאפס אינו משנה את הפונקציה π_B.

יהי $\tilde{B}$ הבסיס של W המתקבל מ B על ידי נירמול אברי B. אזי $\tilde{B}$ בסיס אורתונורמלי של W, ומהאמור לעיל, לכל $v\in V$ מתקיים $\pi_B(v)=\pi_{\tilde{B}}(v)$ ולכן $v-\pi_B(v)=v-\pi_{\tilde{B}}(v)$. לפיכך, מספיק להוכיח את הטענה עבור המקרה ש B בסיס אורתונורמלי של W. נניח איפוא שזה המצב.

יהי $v\in V$. נכתוב $B=\{w_1,\ldots,w_k\}$, ונזכור שכיון ש B אורתונורמלי, $\pi_B(v):=\langle v,w_1\rangle w_1+\cdots+\langle v,w_k\rangle w_k$. יהי $w_i\in B$. מהתזכורת, $\langle \pi_B(v),w_i\rangle=\langle v,w_i\rangle$ (המקדם של w_i בהצגת $\pi_B(v)$ כצירוף לינארית של $w_1,\ldots,w_k$).

לכן, מלינאריות מכפלה פנימית ברכיב הראשון,

$$\langle v-\pi_B(v),w_i\rangle=\langle v,w_i\rangle-\langle \pi_B(v),w_i\rangle=\langle v,w_i\rangle-\langle v,w_i\rangle=0$$

יוצא איפוא, ש $v-\pi_B(v)\in B^\perp=(\operatorname{span}B)^\perp=W^\perp$. ■