השלמה להרצאה בנושא סכומים ישרים

בועז צבאן

20 בנובמבר 2012

למה 0.1 יהי $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$. לכל i, יהיו נתונים תת־מרחבים $U_i, W_i \subseteq V_i$. אזי:

$$(U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k) \cap (W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k) = (U_1 \cap W_1) \oplus (U_2 \cap W_2) \oplus \cdots \oplus (U_k \cap W_k).$$

הוכחה: ראשית, נסביר מדוע כל הסכומים בטענה הם ישרים: יהיו $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ ולכל i, יהי $X_i \subseteq V_i$ תת־מרחב. אז, לכל $i = 1, \ldots, k-1$ מתקיים

$$(X_1 + \cdots + X_i) \cap X_{i+1} \subseteq (V_1 + \cdots + V_i) \cap V_{i+1} = \left\{\vec{0}\right\}$$

ולכן $(X_1 + \cdots + X_i) \cap X_{i+1} = \left\{\vec{0}\right\}$. לכן, הסכום $X_1 + \cdots + X_k$ הוא ישר. הדבר נכון לכל בחירה של תת־מרחבים X_i, ובפרט עבור הבחירות U_i או W_i או $U_i \cap W_i$ הנזכרות בטענה.

$(\supseteq)$ יהי $v \in (U_1 \cap W_1) \oplus (U_2 \cap W_2) \oplus \cdots \oplus (U_k \cap W_k)$. נציג אותו

$$v = v_1 + \cdots + v_k$$

כאשר $v_i \in U_i \cap W_i$ לכל $i = 1, \ldots, k$. בפרט, $v_1 \in U_1, \ldots, v_k \in U_k$ ולכן

$$v = v_1 + \cdots + v_k \in U_1 + \cdots + U_k.$$

כמו כן, בפרט $v_1 \in W_1, \ldots, v_k \in W_k$ ולכן

$$v = v_1 + \cdots + v_k \in W_1 + \cdots + W_k.$$

לכן, $v \in (U_1 + U_2 + \cdots + U_k) \cap (W_1 + W_2 + \cdots + W_k)$.

$(\subseteq)$ יהי $v \in (U_1 + U_2 + \cdots + U_k) \cap (W_1 + W_2 + \cdots + W_k)$. אז יש לו הצגות

$$v = u_1 + \cdots + u_k$$
$$v = w_1 + \cdots + w_k$$

כאשר $u_i \in U_i$ ו $w_i \in W_i$ לכל $i = 1, \ldots, k$. כיון ש $U_i, W_i \subseteq V_i$, נקבל בפרט ש $u_i, w_i \in V_i$, ולכן קיבלנו שתי הצגות של v כאיבר של הסכום הישר $V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. מיחידות ההצגה של איבר של סכום ישר, נקבל ש

$$u_1 = w_1, \ldots, u_k = w_k.$$

יוצא איפוא שלכל $i = 1, \ldots, k$, אם נסמן $v_i := u_i = w_i$, אז $v_i = u_i \in U_i$ וכן $v_i = w_i \in W_i$, ולכן $v_i \in U_i \cap W_i$. לכן,

$$v = v_1 + \cdots + v_k \in (U_1 \cap W_1) + (U_2 \cap W_2) + \cdots + (U_k \cap W_k).$$

■