תקציר הרצאות בנושא דטרמיננטה

בועז צבאן

28 באוקטובר 2012

לעתים הוספתי את הרעיון העיקרי של ההוכחה, בשורה נפרדת, בצבע שונה.

במטריצות לא ציינתי את האיברים שהם אפס, כדי שיהיה קל יותר לזכור.

בניסוח משפטים, לשם קיצור, איני מציין את הכמתים. נא ודאו שאתם יודעים לכתוב את הניסוח המלא של המשפט. למשל, במקום "$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$." יש לכתוב משהו כמו "יהי n מספר טבעי, ויהיו $\sigma,\tau \in S_n$. אזי $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$."

1 תמורות (פרמוטציות)

1. **תמורה** (פרמוטציה) על קבוצה A: פונקציה חד־חד ערכית ועל $\sigma\colon A \to A$.
2. דוגמאות. כתיבה כמערך בן שתי שורות.
3. אוסף כל התמורות על A מסומן S_A. במקרה ש $A = \{1,\dots,n\}$ כותבים S_n במקום S_A.
4. **חילוף סדר** בתמורה $\sigma \in S_n$ הוא זוג (i,j) כך ש $i<j$ אך $\sigma(i) > \sigma(j)$.
5. **הסימן** של תמורה, $\operatorname{sgn}(\sigma)$, הוא 1 אם מספר חילופי הסדר ב σ זוגי ו -1 אם מספר חילופי הסדר ב σ איזוגי, במלים אחרות, (-1) בחזקת מספר חילופי הסדר ב σ.
6. $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$. (ללא הוכחה.)
7. מסקנה: $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.
   $\operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$.
8. **חילוף** הוא תמורה σ כך שיש i,j שונים עם $\sigma(j)=i$,$\sigma(i)=j$, ולכל k אחר, $\sigma(k)=k$. במקרה זה, מסמנים $\sigma = (i\,j)$.
9. **מחזור** (מאורך ℓ) הוא תמורה σ כך שיש $i_1,\dots,i_\ell$ שונים כך ש
$$\sigma(i_1)=i_2, \sigma(i_2)=i_3,\dots,\sigma(i_{\ell-1})=i_\ell, \sigma(i_\ell)=i_1$$
   ולכל k אחר, $\sigma(k)=k$. במקרה זה, מסמנים $\sigma = (i_1\, i_2\, \dots\, i_\ell)$.
10. הסימן של חילוף הוא -1.
    $(i_1\, i_2) = \sigma(1\,2)\sigma^{-1}$ כאשר $\sigma(1)=i_1, \sigma(2)=i_2$ (שאר ערכי σ - כרצוננו).
11. הסימן של מחזור מאורך ℓ הוא $(-1)^{\ell-1}$.
    $(i_1\,\dots\,i_\ell) = (i_1\,i_2)(i_2\,i_3)\cdots(i_{k-1}\,i_\ell)$.
12. הצגת תמורה כמכפלת מחזורים זרים. (ללא הוכחה.)
13. חישוב סימן של תמורה על ידי פירוק למחזורים זרים.

2 דטרמיננטות

1. **הדטרמיננטה** של מטריצה ריבועית A, מסומנת $|A|$ או $\det(A)$, מוגדרת $|A| = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.
2. חישובים מלאים לפי ההגדרה:
   (א) המקרה $n=2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} = ab - cd$. כלל אצבע: האלכסון הרגיל פחות האלכסון ההפוך.
   (ב) המקרה $n=3$: שלשת האלכסונים הרגילים פחות שלשת האלכסונים ההפוכים, במטריצה המורחבת $\left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h\end{array}\right)$.

(ג) במקרים $n \geq 4$ כללי אלה אינם עובדים (יש יותר תמורות מאלכסונים).

3. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית: $\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

כל תמורה פרט לזהות תורמת 0 לדטרמיננטה (כיון שהיא בוחרת משהו משמאל לאלכסון).

4. ליניאריות הדטרמיננטה בכל שורה: $\begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{w} \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \mathbf{u} \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \mathbf{w} \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}$, כאשר הוקטורים מציינים את שורות המטריצות.

חישוב ישיר, לפי ההגדרה של דטרמיננטה.

3 חישוב דטרמיננטה על ידי דירוג מטריצה

1. מסקנה מלינאריות הדטרמיננטה בכל שורה: אם A' התקבלה מ A על ידי כפל שורה של A ב α, אז $|A'| = \alpha\,|A|$.
2. למטריצה עם שתי שורות שוות דטרמיננטה 0.

סוכמים בנפרד על התמורות הזוגיות ובנפרד על האיזוגיות. האיזוגיות מתקבלות מהזוגיות על ידי כפל בחילוף $(i\,j)$ כאשר i, j הן השורות שהוחלפו.

3. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת ($R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j$) אינה משנה את הדטרמיננטה.

מלינאריות.

4. החלפת שורות מטריצה כופלת את הדטרמיננטה ב -1.

הפעולה $R_i \leftrightarrow R_j$ מתקבלת מהוספת/חיסור שורות לשורות והוצאת -1:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u-v \\ v \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u-v \\ u \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}.$$

5. חישוב דטרמיננטה על ידי דירוג המטריצה: כופלים את כל הסקלרים שיוצאים עד לקבלת צורה משולשית, שהדטרמיננטה שלה היא מכפלת אברי האלכסון.

4 מכפלות של דטרמיננטות

1. $|A| = |A^t|$.

מההגדרה של דטרמיננטה כסכום של מכפלות, והמרת תמורה בתמורה ההפוכה: $a_{i\sigma(i)} = a_{\sigma^{-1}(j)j} = a_{j\sigma^{-1}(j)}$, כאשר $j := \sigma(i)$.

2. מסקנה: המשפטים על שורות נותנים משפטים על עמודות.
3. פונקציה $f : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ תיקרא **כמו־דטרמיננטה** אם $f(A)$ לינארית בכל שורה של A, מחליפה סימן עם החלפת שורות, ומתאפסת על כל מטריצה עם שתי שורות שוות.
4. דוגמאות לכמו־דטרמיננטה:

(א) $f(A) = |A|$.

(ב) $f(A) = \begin{vmatrix} B & C \\ O & A \end{vmatrix}$ עבור מטריצות קבועות B, C כך ש B ריבועית.

(ג) $f(A) = \begin{vmatrix} A & O \\ O & I \end{vmatrix}$.

(ד) $f(A) = |AB|$, עבור מטריצה ריבועית קבועה B.

5. פעולות אלמנטריות משפיעות על כמו־דטרמיננטה באותה צורה שהן משפיעות על הדטרמיננטה.

6. כמו־דטרמיננטה (ובפרט דטרמיננטה) של מטריצה עם שורת אפסים היא 0.

7. יחידות הדטרמיננטה: אם f היא כמו־דטרמיננטה, אז $f(A) = f(I) \cdot |A|$.
מחשבים את $|A|$ ואת $f(A)$ בעזרת דירוג A עד למצב של מטריצה מדורגת קנונית (שהיא I או עם שורת אפסים). הדירוגים מוציאים אותם סקלרים.

8. אם המטריצות B, A ריבועיות, אז $|B| \cdot |A| = \begin{vmatrix} B & C \\ O & A \end{vmatrix}$.
$\begin{vmatrix} B & C \\ O & A \end{vmatrix} = f(A) = f(I) \cdot |A|$ (כמו־דטרמיננטה). $f(I) = \begin{vmatrix} B & C \\ O & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & O \\ O & I \end{vmatrix}$ (דירוג על ידי הוספת כפולות של השורות התחתונות).
$g(B) := \begin{vmatrix} B & O \\ O & I \end{vmatrix}$ היא כמו־דטרמיננטה, לכן $g(B) = g(I) \cdot |B|$, ו $g(I) = \begin{vmatrix} I & C \\ O & I \end{vmatrix} = 1$ (מטריצה משולשית).

9. $|AB| = |A| \cdot |B|$.
$|AB| = f(A) = f(I) \cdot |A|$ (כמו־דטרמיננטה), ו $f(I) = |IB| = |B|$.

10. מסקנות:
   (א) A הפיכה $\iff |A| \neq 0$.
   (ב) מכפלת מטריצות היא הפיכה אם ורק אם כולן הפיכות.
   (ג) $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$ לכל מטריצה הפיכה.
   (ד) $\left|A^k\right| = |A|^k$.

5 המטריצה הנלוית (Adjoint)

1. **משפט קרמר** על חישוב פתרון למערכת משוואות הפיכה.
$$x_i = \begin{vmatrix} e_1, \ldots, & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} & , \ldots, e_n \end{vmatrix} = \left|\left(A^{-1}v_1, \ldots, A^{-1}b, \ldots, A^{-1}v_n\right)\right| = \left|A^{-1}A_i\right| = |A|^{-1}|A_i| = \frac{|A_i|}{|A|}.$$
השויון האחרון מדטרמיננטה של מטריצת בלוקים.

2. **המינור** A_{ij} הוא המטריצה המתקבלת מ A על ידי מחיקת שורה i ועמודה j.

3. **פיתוח דטרמיננטה לפי שורה או עמודה:** $|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$ (פיתוח לפי שורה i), ובדומה עבור עמודה.
מליניאריות בשורה i, $|A| = a_{i1}|B_1| + \cdots + a_{in}|B_n|$ כאשר $B_j = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ e_j \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ המטריצה המתקבלת מ A על ידי החלפת שורה i בוקטור היחידה e_j. על ידי $i-1$ החלפות שורה ואחריהן $j-1$ החלפות עמודה, נביא את הסקלר 1 בוקטור היחידה לפינה העליונה השמאלית של המטריצה, לקבל: $|A_{ij}| (-1)^{i+j} = \begin{vmatrix} 1 & \vec{0} \\ * & A_{ij} \end{vmatrix} (-1)^{i-1+j-1} = |B_j|$.

4. **המטריצה הנלוית** $\operatorname{adj}(A) = \left((-1)^{i+j}|A_{ji}|\right)_{i,j=1..n}$.

5. $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) \cdot A = |A| \cdot I$.
רכיבי האלכסון של $A \cdot \operatorname{adj}(A)$ הם פיתוח לפי שורה של $|A|$.
הרכיבים (i,j) מחוץ לאלכסון הם פיתוח לפי שורה של מטריצה עם שתי שורות שוות (שווה ל A בכל מקום פרט לשורה i שלה ששווה גם היא לשורה j של A).

6. שימוש לחישוב המטריצה ההופכית: אם A הפיכה, אז $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$.

7. המחשה במקרים $n = 2, 3$.