1 סכום ישר של תת־מרחבים

פרק זה כולל טענות אלמנטריות, שהוכחתן מושארת לקורא כתרגיל.

הגדרה: יהיו V מרחב וקטורי, $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ תת־מרחבים. הסכום $W = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ הוא ישר אם כל אחד מהסכומים המופיעים בו הוא ישר. פורמלית, $W = ((U_1 + U_2) + U_3) + \cdots + U_k$, ואנו דורשים שלכל $i = 1, \dots, k-1$, הסכום

$$(U_1 + \cdots + U_i) + U_{i+1}$$

הוא ישר, או באופן שקול:

$$(U_1 + \cdots + U_i) \cap U_{i+1} = \left\{\vec{0}\right\}.$$

במקרה כזה, כותבים $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ ואומרים שזו הצגה של W כסכום ישר.

דוגמא: הסכום $\mathbb{R}^3 = \{(x,0,0) \,:\, x \in \mathbb{R}\} + \{(0,y,0) \,:\, y \in \mathbb{R}\} + \{(0,0,z) \,:\, z \in \mathbb{R}\}$ הוא ישר.

למה 1.1 אם $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ בסיס של V, והקבוצות $B_1, B_2, \dots, B_k$ זרות, אז

$$V = \operatorname{span} B_1 \oplus \operatorname{span} B_2 \oplus \cdots \oplus \operatorname{span} B_k.$$

תרגיל. מצא מרחב וקטורי V ותת־מרחבים $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ כך שכל אחד מהסכומים $U_1 + U_2, U_2 + U_3, U_1 + U_3$ הוא ישר, אבל הסכום $U_1 + U_2 + U_3$ אינו ישר. (רמז: קח $V = \mathbb{R}^2$.)

למה 1.2 התכונות הבאות שקולות:

א. הסכום $W = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ הוא ישר.

ב. אם $\vec{0} = u_1 + \cdots + u_k$ וכל $u_i \in U_i$, אז $u_1 = \cdots = u_k = \vec{0}$.

ג. לכל $w \in W$ יש הצגה יחידה כסכום $w = u_1 + \cdots + u_k$ כך ש $u_i \in U_i$ לכל $i = 1, \dots, k$.

ד. לכל $i = 1, \dots, k$ מתקיים $(U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_k) \cap U_i = \left\{\vec{0}\right\}$.

ה. לכל $\sigma \in S_k$, $W = U_{\sigma(1)} \oplus U_{\sigma(2)} \oplus \cdots \oplus U_{\sigma(k)}$.

הוכחה: (הדרכה) א⇐ב⇐ג⇐ד⇐ה⇐א. ■

למה 1.3 יהי $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$. לכל i, יהיו נתונים תת־מרחבים $U_i, W_i \subseteq V_i$. אזי:

$$(U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k) \cap (W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k) = (U_1 \cap W_1) \oplus (U_2 \cap W_2) \oplus \cdots \oplus (U_k \cap W_k).$$

הוכחה: (הדרכה) ההכלה ($\subseteq$) מיחידות ההצגה, והשניה מיידית. ■

למה 1.4 יהי $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$.

א. $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 + \cdots + \dim U_k$.

ב. לכל $i = 1, \dots, k$, יהי B_i בסיס של U_i. נסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$. אזי B בסיס של V.

הוכחה: (הדרכה) (א) באינדוקציה על k, ושימוש במשפט המימדים עבור סכום ישר של שני תת־מרחבים.

(ב) הקבוצות B_i זרות זו לזו ולכן מ (א), $\#B = \dim V$. נותר לשים לב ש B פורשת. ■

2 תת־מרחבים אינוריאנטים

הגדרה 2.1 יהי $T:V\to V$ אופרטור. תת־מרחב $U\subseteq V$ ייקרא אינוריאנטי (תחת T) אם לכל $u\in U$ מתקיים $Tu\in U$.

הגדרה 2.2 יהיו $T:V\to V$ אופרטור, $U\subseteq V$ תת־מרחב אינוריאנטי, ו E בסיס של U. אזי $T|_U:U\to U$ אופרטור, וניתן להציג אותו כמטריצה $[T|_U]_E$. נסמן הצגה זו בקצרה: $[T]_E$. במלים אחרות, עבור קבוצה בת"ל $E\subseteq V$ שאינה דווקא בסיס, אם $\operatorname{span}E$ אינוריאנטי, אז המטריצה $[T|_{\operatorname{span}E}]_E$ תסומן $[T]_E$.

דוגמא. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\z\\0\end{pmatrix}$. $U=\operatorname{span}\{e_1,e_2\}$ אינוריאנטי, ו

$$[T]_{\{e_1,e_2\}}=\left[T|_{\operatorname{span}\{e_1,e_2\}}\right]_{\{e_1,e_2\}}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

הגדרה 2.3 מטריצה אלכסונית־בלוקים היא מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix}A_1&O&\cdots&O\\O&A_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&O\\O&\cdots&O&A_k\end{pmatrix}$$

כך שכל A_i ("בלוק") היא מטריצה ריבועית. אנו מרשים גם את המקרה הטריויאלי, בו $k=1$.

למה 2.4 (הצגה אלכסונית־בלוקים) יהי $T:V\to V$ אופרטור.

1. יהי $V=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_k$ סכום ישר של מרחבים אינוריאנטים, ולכל $i=1,\dots,k$, יהי B_i בסיס של U_i. נסמן $B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k$. אזי:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}[T]_{B_1}&O&\cdots&O\\O&[T]_{B_2}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&O\\O&\cdots&O&[T]_{B_k}\end{pmatrix}.$$

2. מצד שני, אם

$$[T]_B=\begin{pmatrix}A_1&O&\cdots&O\\O&A_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&O\\O&\cdots&O&A_k\end{pmatrix}.$$

מטריצה אלכסונית־בלוקים, אז יש חלוקה של B לאיחוד זר, $B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k$, כך שלכל $i=1,\dots,k$, התת־מרחב $U_i=\operatorname{span}B_i$ הוא אינוריאנטי, ו $[T]_{B_i}=A_i$.

בהוכחת הלמה, נשתמש בסימון הבא. עבור $v\in\mathbb{F}^k,u\in\mathbb{F}^l$ נסמן ב $\begin{pmatrix}v\\u\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{k+l}$ את הוקטור ש k רכיביו הראשונים הם רכיבי v, והרכיבים הנותרים הם רכיבי u (שירשור שני הוקטורים).

הוכחה: באינדוקציה על k.

(1) במקרה $k=1$ אין מה להוכיח. הוכחת המקרה $k=2$: יהיו $V=U_1\oplus U_2$, כאשר U_1,U_2 אינוריאנטים, B_1,B_2 בסיסים של U_1,U_2 בהתאמה, $B=B_1\cup B_2$.

לכל $v\in B_1$, כיון ש $B_1\subseteq U_1$ ו U_1 אינוריאנטי, $T(v)\in U_1$ ולכן ניתן להציגו כצירוף לינארי של אברי B_1. לכן, $[Tv]_B=\begin{pmatrix}[Tv]_{B_1}\\\vec{0}\end{pmatrix}$.

בדומה, לכל $u\in B_2$ מתקיים $[Tu]_B=\begin{pmatrix}\vec{0}\\ [Tu]_{B_2}\end{pmatrix}$.

יהיו $B_1 = \{v_1, \dots, v_r\}, B_2 = \{u_1, \dots, u_d\}$. אזי

$$\begin{aligned}
[T]_B &= \left([Tv_1]_B, \dots, [Tv_r]_B, [Tu_1]_B, \dots, [Tu_d]_B\right) = \\
&= \begin{pmatrix} [Tv_1]_{B_1} & , \dots, & [Tv_r]_{B_1} & , & \vec{0} & , \dots, & \vec{0} \\ \vec{0} & & \vec{0} & & [Tu_1]_{B_2} & & [Tu_d]_{B_2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & O \\ O & [T]_{B_2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

כעת נניח את נכונות הטענה (1) עבור פחות מ k מחוברים, ונוכיחה עבור k מחוברים. מהנתון,

$$V = (U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_{k-1}) \oplus U_k$$

סכום ישר של שני תת־מרחבים אינטריאנטים, ו

$$B = (B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}) \cup B_k$$

איחוד זר של בסיסים של שני מרחבים אלה. מהמקרה $k = 2$, נקבל ש

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_{B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}} & O \\ O & [T]_{B_k} \end{pmatrix}.$$

מהנחת האינדוקציה עבור $k - 1$,

$$[T]_{B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}} = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & O & \cdots & O \\ O & [T]_{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & [T]_{B_{k-1}} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_B = \left(\begin{array}{cccc|c} [T]_{B_1} & O & \cdots & O & O \\ O & [T]_{B_2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O & \vdots \\ O & \cdots & O & [T]_{B_{k-1}} & O \\ \hline O & \cdots & \cdots & O & [T]_{B_k} \end{array}\right).$$

(2) גם כאן המקרה $k = 1$ טריויאלי, והטענה נובעת באינדוקציה מהמקרה $k = 2$. נוכיח איפוא מקרה זה.

תהי $[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, נניח $A_1 \in \mathbb{F}^{r \times r}, A_2 \in \mathbb{F}^{d \times d}$. יהי $B = \{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_d\}$. נסמן

$$B_1 = \{v_1, \dots, v_r\}, B_2 = \{u_1, \dots, u_d\}$$

ו $U_i = \operatorname{span} B_i$ ($i = 1, 2$).

$$\begin{aligned}
\left([Tv_1]_B, \dots, [Tv_r]_B, [Tu_1]_B, \dots, [Tu_d]_B\right) &= [T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} A_1 e_1 & , \dots, & A_1 e_r & , & \vec{0} & , \dots, & \vec{0} \\ \vec{0} & & \vec{0} & & A_2 e_1 & & A_2 e_d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

לכן, לכל $i = 1, \dots, r$, $[Tv_i]_B = \begin{pmatrix} A_1 e_i \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ ובפרט Tv_i צירוף לינארי של $v_1, \dots, v_r$ (בלבד), ולכן שייך ל $U_1 = \operatorname{span} B_1$.
לכן, $T[U_1] = \operatorname{span} T[B_1] \subseteq U_1$, כלומר U_1 הוא אינוריאנטי. יתר על כן, כיון שTv_i צירוף לינארי של $v_1, \dots, v_r$ בלבד, $A_1 e_i = [Tv_i]_B = [Tv_i]_{B_1}$, ולכן

$$[T]_{B_1} = \left([Tv_1]_{B_1}, \dots, [Tv_r]_{B_1}\right) = (A_1 e_1, \dots, A_1 e_r) = A_1.$$

באותו אופן (בדוק!), U_2 אינוריאנטי ומתקיים $[T]_{B_2} = A_2$. ■

דוגמא. תהי $A=\begin{pmatrix}7&-3&-6\\0&1&0\\4&-2&-3\end{pmatrix}$, ונתבונן באופרטור $L_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ של כפל משמאל ב A, $L_A(v):=Av$. בדיקה ישירה מראה שהתת־מרחבים

$$U=\operatorname{span}\left\{u_1:=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},u_2:=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\},\ W=\operatorname{span}\left\{w:=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

הם אינוריאנטים ושסכומם ישר. לכן, $\left(\begin{array}{cc|c}2&1&0\\1&2&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}[L_A]_{\{u_1,u_2\}}&O\\O&[L_A]_{\{w\}}\end{pmatrix}=[L_A]_{\{u_1,u_2,w\}}$.

מסקנה 2.5 אם

$$[T]_B=\begin{pmatrix}A_1&O&\cdots&O\\O&A_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&O\\O&\cdots&O&A_k\end{pmatrix}$$

אלכסונית־בלוקים , אז לכל $\sigma\in S_k$, יש בסיס B' (המתקבל מ B על ידי שינוי סדר איבריו), כך ש

$$[T]_{B'}=\begin{pmatrix}A_{\sigma(1)}&O&\cdots&O\\O&A_{\sigma(2)}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&O\\O&\cdots&O&A_{\sigma(k)}\end{pmatrix}.$$

הוכחה: מהחלק השני של הלמה הקודמת, יש פירוק של B לאיחוד זר, $B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k$ כך שלכל $i=1,\dots,k$, התת־מרחב $U_i=\operatorname{span}B_i$ הוא אינוריאנטי, ו $[T]_{B_i}=A_i$. נסדר את אברי B בצורה אחרת: $B=B_{\sigma(1)}\cup B_{\sigma(2)}\cup\cdots\cup B_{\sigma(k)}$. מהחלק הראשון של הלמה,

$$[T]_B=\begin{pmatrix}[T]_{B_{\sigma(1)}}&O&\cdots&O\\O&[T]_{B_{\sigma(2)}}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&O\\O&\cdots&O&[T]_{B_{\sigma(k)}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{\sigma(1)}&O&\cdots&O\\O&A_{\sigma(2)}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&O\\O&\cdots&O&A_{\sigma(k)}\end{pmatrix}.$$

■

מסקנה 2.6 תהי

$$\begin{pmatrix}A_1&O&\cdots&O\\O&A_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&O\\O&\cdots&O&A_k\end{pmatrix}$$

מטריצה אלכסונית־בלוקים. לכל $\sigma\in S_k$, מטריצה זו דומה למטריצה

$$\begin{pmatrix}A_{\sigma(1)}&O&\cdots&O\\O&A_{\sigma(2)}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&O\\O&\cdots&O&A_{\sigma(k)}\end{pmatrix}.$$

כלומר, החלפת סדר הבלוקים באלכסון נותנת מטריצה דומה.

הוכחה: כל מטריצה היא הצגה של אופרטור. לכן אפשר להשתמש במסקנה הקודמת. ■

למה 2.7 יהיו $T:V\to V$ אופרטור ו $V=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_k$ פירוק לסכום ישר של מרחבים אינוריאנטים. אזי:

$$\ker T=\ker T|_{U_1}\oplus\ker T|_{U_2}\oplus\cdots\oplus\ker T|_{U_k}$$
$$\operatorname{im}T=\operatorname{im}T|_{U_1}\oplus\operatorname{im}T|_{U_2}\oplus\cdots\oplus\operatorname{im}T|_{U_k}.$$