השלמה להרצאה בנושא תהליך גרם־שמידט

בועז צבאן

30 בדצמבר 2012

את חלק (2) בהוכחת אי־שוויון קושי־שוורץ (משפט 2.2) לא הספקנו ללמוד בהרצאה, והוא ללימוד עצמי. כל השאר ־ חזרה על דברים שעשינו בהרצאה ואפשר לדלג עליהם אם הבנתם.

1 השלמת בא"נ של תת־מרחב לבא"נ של המרחב כולו

למה 1.1 יהיו $v_1,\ldots,v_k$ וקטורים מאונכים השונים מאפס, בממ"פ. לכל $v\in\{v_1,\ldots,v_k\}^\perp$ מתקיים $\pi_{\{v_1,\ldots,v_k\}}(v)=\vec{0}$.

הוכחה: מיידית מההגדרה:

$$\pi_{\{v_1,\ldots,v_k\}}(v)=\frac{\langle v,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1+\cdots+\frac{\langle v,v_k\rangle}{\|v_k\|^2}v_k=\frac{0}{\|v_1\|^2}v_1+\cdots+\frac{0}{\|v_k\|^2}v_k=\vec{0}.$$

■

משפט 1.2 יהי V ממ"פ, ויהי $W\subseteq V$ תת־מרחב. כל בא"נ $\{v_1,\ldots,v_k\}$ של W ניתן להשלים לבא"נ $\{v_1,\ldots,v_k,\ldots,v_n\}$ של V כולו.

הוכחה: נשלים את $v_1,\ldots,v_k$ לבסיס כלשהו $v_1,\ldots,v_k,\ldots,v_n$ של V. נפעיל את תהליך גרם שמידט על הבסיס $v_1,\ldots,v_k,\ldots,v_n$, לקבל בסיס אורתוגונלי $\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_k,\ldots,\mathring{v}_n$, וננרמל את הוקטורים שהתקבלו, לקבל בא"נ $\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_k,\ldots,\tilde{v}_n$ של V. נראה, באינדוקציה על i, שלכל $i=1,\ldots,k$ מתקיים $\tilde{v}_i=v_i$ (ולכן הבא"נ שהתקבל מרחיב את הבא"נ הנתון של W).

$i=1$: מהגדרת תהליך גרם־שמידט, $\mathring{v}_1=v_1$. כיון ש v_1 נורמלי (כאיבר של בא"נ של W), נירמולו אינו משנה אותו, כלומר $\tilde{v}_1=v_1$.

נניח נכונות הטענה עבור $i,\ldots,1$ ($i<k$) ונוכיחה עבור $i+1$: מהגדרת תהליך גרם־שמידט ומהנחת האינדוקציה ($\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_i=v_1,\ldots,v_i$), וכיון ש v_{i+1} מאונך ל $v_1,\ldots,v_i$ (בהיותם יחד חלק מבא"נ של תת־מרחב), נקבל מהלמה לעיל ש

$$\mathring{v}_{i+1}=v_{i+1}-\pi_{\left\{\mathring{v}_1,\ldots,\mathring{v}_i\right\}}(v_{i+1})=v_{i+1}-\pi_{\{v_1,\ldots,v_i\}}(v_{i+1})=v_{i+1}-\vec{0}=v_{i+1}.$$

כיון ש v_{i+1} כבר נורמלי, נירמולו לא ישנה אותו, ונקבל ש $\tilde{v}_{i+1}=v_{i+1}$. ■

2 אי־שיויון בסל ואי־שיויון קושי־שוורץ

משפט 2.1 (אי־שיויון בסל) יהיו $v_1,\ldots,v_k$ וקטורים אורתונורמלים בממ"פ V. אזי לכל $v\in V$:

1. $\|v\|^2\geq|\langle v,v_1\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_k\rangle|^2$.
2. שויון מתקיים ב (1) אם ורק אם $v\in\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_k\}$.

הוכחה: המשפט הקודם, אפשר להשלים את $v_1,\ldots,v_k$ לבא"נ $v_1,\ldots,v_n$ של V.

(1) מממשפט פיתגורס,

$$\|v\|^2=|\langle v,v_1\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_k\rangle|^2+|\langle v,v_{k+1}\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_n\rangle|^2\geq|\langle v,v_1\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_k\rangle|^2.$$

(2) אם $v\in\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_k\}$, אז מממשפט פיתגורס, $\|v\|^2=|\langle v,v_1\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_k\rangle|^2$.

מצד שני, נניח ש $\|v\|^2=|\langle v,v_1\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_k\rangle|^2$. ממשפט פיתגורס, נקבל

$$|\langle v,v_1\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_k\rangle|^2=\|v\|^2=|\langle v,v_1\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_k\rangle|^2+|\langle v,v_{k+1}\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_n\rangle|^2$$

ולכן $|\langle v,v_{k+1}\rangle|^2+\cdots+|\langle v,v_n\rangle|^2=0$ ולכן $|\langle v,v_{k+1}\rangle|^2=\cdots=|\langle v,v_n\rangle|^2=0$ ולכן $\langle v,v_{k+1}\rangle=\cdots=\langle v,v_n\rangle=0$. כיון ש $v_1,\ldots,v_n$ בא"נ של V,

$$\begin{aligned}v&=\langle v,v_1\rangle v_1+\cdots+\langle v,v_k\rangle v_k+\langle v,v_{k+1}\rangle v_{k+1}+\cdots+\langle v,v_n\rangle v_n=\\&=\langle v,v_1\rangle v_1+\cdots+\langle v,v_k\rangle v_k+0v_{k+1}+\cdots+0v_n=\langle v,v_1\rangle v_1+\cdots+\langle v,v_k\rangle v_k\in\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_k\}.\end{aligned}$$

■

משפט 2.2 (אי־שיויון קושי־שוורץ) יהי V ממ"פ. לכל $u, v \in V$ מתקיים:

1. $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
2. שיויון מתקיים ב (1) אם ורק אם u, v תלויים לינארית.

הוכחה: עבור $v = \vec{0}$ הטענה ברורה: $\left|\left\langle u, \vec{0}\right\rangle\right| = \left|\vec{0}\right| = 0 = \|u\| \cdot \left\|\vec{0}\right\|$ ולכן מתקיים האי־שיויון ולמעשה שויון, ואכן $u, \vec{0}$ תלויים לינארית. נותר להוכיח את הטענה כאשר $v \neq \vec{0}$.

יהי $v_1 := \frac{1}{\|v\|} v$. מאי־שיויון בסל, מתקיים $|\langle u, v_1\rangle|^2 \leq \|u\|^2$ ושיויון אם ורק אם $u \in \operatorname{span}\{v_1\}$.

(1) כיון $|\langle u, v_1\rangle|^2 \leq \|u\|^2$, נקבל $|\langle u, v_1\rangle| \leq \|u\|$ (הביטויים אינם שליליים, ולכן אין צורך להוסיף להם ערך מוחלט). לכן,

$$\|u\| \geq \left|\left\langle u, \frac{1}{\|v\|} v\right\rangle\right| = \left|\frac{1}{\|v\|} \langle u, v\rangle\right| = \frac{1}{\|v\|} |\langle u, v\rangle|$$

(השתמשנו בכך ש $\frac{1}{\|v\|} > 0$ ובפרט ממשי, וכמו־לינאריות של מ"פ ברכיב השני, ובכפליות של ערך מוחלט.) נכפול את שני האגפים ב $\|v\|$ ונקבל את הדרוש.

(2) אם $|\langle u, v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$ אז

$$\|u\| = \frac{1}{\|v\|} |\langle u, v\rangle| = \left|\frac{1}{\|v\|} \langle u, v\rangle\right| = \left|\left\langle u, \frac{1}{\|v\|} v\right\rangle\right| = |\langle u, v_1\rangle|$$

ולכן $|\langle u, v_1\rangle|^2 = \|u\|^2$. מאי־שיויון בסל, $u \in \operatorname{span}\{v_1\}$. כיון ש v_1 מתקבל מ v על ידי כפל בסקלר שונה מ 0, $\operatorname{span}\{v_1\} = \operatorname{span}\{v\}$.

הכיוון ההפוך גם הוא נובע מאי־שיויון בסל בצורה דומה, אך נוכיחו ישירות: נניח ש $u = \alpha v$. אז

$$|\langle u, v\rangle| = |\langle \alpha v, v\rangle| = |\alpha \langle v, v\rangle| = \left|\alpha \|v\|^2\right| = |\alpha| \|v\|^2 = (|\alpha| \|v\|) \|v\| = \|\alpha v\| \|v\| = \|u\| \|v\| .$$

■