ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, דמיון - סיכום

הגדרות:

1. ערכים עצמיים (ע"ע), וקטורים עצמיים (ו"ע) של מטריצה A -
בהנתן מטריצה A, הו"ע שלה הם וקטורים $v \neq 0$, המקיימים: $Av = \lambda v$.
λ נקרא הע"ע המתאים.
2. פולינום אופייני (פ"א): הפולינום המתקבל מהחישוב: $|\lambda I - A|$.
3. ריבוי אלגברי (ר"א) של ע"ע λ_i: החזקה של $(\lambda - \lambda_i)$ בפ"א.
4. ריבוי גיאומטרי (ר"ג) של ע"ע λ_i: המספר המקסימלי של וקטורים עצמיים בת"ל המתאימים ל- λ_i.
5. דמיון: שתי מטריצות A ו- B תקראנה דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש: $P^{-1}AP = B$.
6. לכסינות: A לכסינה אם קיימת P הפיכה ו - D אלכסונית כך ש: $P^{-1}AP = D$.
ל - P נקרא מטריצה מלכסנת של A.

שלבי חישוב ע"ע ו"ע:

1. חישוב פ"א: מקבלים את הפולינום האופייני ע"י חישוב: $|\lambda I - A|$.
2. חישוב ע"ע: מוצאים את שורשי הפ"א.
3. חישוב ו"ע: לכל ערך עצמי λ_i יש לפתור את מערכת המשוואות:

$$(\lambda_i I - A)x = 0$$

מרחב הפתרונות של המערכת הנ"ל נקרא המרחב העצמי של λ_i. מימדו של מרחב זה שווה לריבוי הגיאומטרי של λ_i וכל וקטור שונה מאפס במרחב זה הוא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי λ_i.

משפטים:

1. ו"ע ששייכים לע"ע שונים הם בלתי תלויים ליניארית.
2. ר"א $\geq$ ר"ג ≥ 1 לכל ע"ע.
3. מעל לשדה בו נמצאים כל הע"ע: $\sum \lambda_i = tr(A)$
4. מעל לשדה בו נמצאים כל הע"ע: $\prod \lambda_i = det(A)$

5. $A_{n\times n}$ לכסינה מעל שדה $\Leftrightarrow$ ר״א = ר״ג לכל ע״ע, וכל הע״ע שלה בשדה זה;

$\Leftrightarrow$ ל- $A_{n\times n}$ יש n ו״ע בלתי תלויים ליניארית.

6. אם ל- $A_{n\times n}$ יש n ע״ע שונים אז A לכסינה. (תנאי מספיק אבל לא הכרחי).

7. אם A לכסינה אז העמודות של מטריצה מלכסנת P הן קבוצה בלתי תלויה של וקטורים עצמיים, והאלכסון הראשי של D מורכב מהערכים העצמיים של A.

8. **אם** A ו- B דומות **אז**: א. יש להן אותו פ״א.

ב. יש להן אותם ע״ע כולל ריבויים (גם ר״א וגם ר״ג).

ג. יש להן אותה דטרמיננטה.

ד. יש להן אותה עקבה.

תכונות חשובות:

1. אם λ ע״ע ו - v ו״ע מתאים של A, אז λ^n הינו ע״ע ו - v ו״ע מתאים של A^n.

2. 0 ע״ע של A $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$ $\Leftrightarrow$) A לא הפיכה).

3. אם A הפיכה ו- λ ע״ע של A עם ו״ע מתאים v, אז λ^{-1} הינו ע״ע שמתאים ל- A^{-1} עם ו״ע v.

4. אם λ ע״ע מרוכב, ו - v ו״ע מתאים של A ממשית, אז $\bar{\lambda}$ הינו ע״ע ו - $\bar{v}$ ו״ע מתאים של A.

5. נתון $f(x)$ פולינום כלשהו, ויהי λ ע״ע של A ו - v ו״ע מתאים, ותהי B מטריצה כך ש: $B = f(A)$; אז $f(\lambda)$ הינו ע״ע של B עם ו״ע מתאים v.

6. אם סכום אברי השורה של מטריצה A הינו מספר קבוע k, אז k הינו ע״ע, וו״ע מתאים הינו הוקטור: $(1,1,......1)$. (יתכנו עוד ו״ע).