

שאלה 1:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 2 & -5 & 4-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -5 & 4-x \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = -x(-x(4-x)+5)+2 = -x(x^2-4x+5)+2$$

$$= -x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = -(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = -(x(x^2 - 4x + 4) + (x - 2))$$

$$= -(x(x-2)^2 + (x-2)) = -(x-2)[x(x-2)+1] = -(x-2)(x^2-2x+1) = -(x-2)(x-1)^2$$

ולכן קיבלנו שני ע"ע : $x=2, x=1$.

הוקטורים העצמיים שלהם הם :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow x=y=z \Rightarrow t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x=1$$

עבור

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow y=2x, z=2y=4x \Rightarrow t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} x=2$$

עבור

ולכן המטריצה אינה לכסינה.

שאלה 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - xI| = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & a \\ 1 & 1-x & a \\ 0 & 0 & a+2-x \end{vmatrix} = (a+2-x)(2-x)(1-x)$$

כלומר קיבלנו שעבור $a \neq -1, 0$ יש בעצם שלושה ערכים עצמיים שונים ואז לפי משפט המטריצה לכסינה. צריך לבדוק רק מה קורה בשני מקרי הקצה:

$a = 0$: נציב $a = 0$ במטריצה המקורית ונקבל

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - xI| = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2(1-x)$$

ערכים עצמיים ומספיק לבדוק שעבור ע"ע $x = 2$ יש 2 ו"ע. נציב במטריצה $x = 2$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = t, z = s \Rightarrow t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר יש שני ו"ע ולכן ר"א = ר"ג.

לערך העצמי השני יש ו"ע יחיד לפי הכלל שאמרנו בכיתה : ר"א ≤ ר"ג ≤ 1. ולכן המטריצה לכסינה.

לכן נותר רק לבדוק מה קורה עבור $a = -1$:

$$\begin{vmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)^2(1-x)$$

כלומר קיבלנו שצריך לבדוק שעבור $x = -1$ יש 2 ו"ע.

ואז המטריצה לכסינה.

נציב על מנת למצוא וקטורים עצמיים :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = z = t, y = s \Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ s \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

העצמי השני יש ו"ע יחיד לפי הכלל שאמרנו בכיתה : ר"א ≤ ר"ג ≤ 1. ולכן המטריצה לכסינה.

שאלה 3

$$\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & -x & a^2 \\ 1 & 4 & -x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} -x & a^2 \\ 4 & -x \end{vmatrix} = (2-x)(x^2 - 4a^2) = (2-x)(x-2a)(x+2a)$$

כל זמן שנקבל 3 ע"ע שונים המטריצה לכסינה. השאלה היא מה קורה עבור המקרים בהם יש ע: ע מריבוי אלגברי 2.

עבור $a = 1$:

$$(2-x)(x-2)(x+2) = -(x-2)^2(x+2) \quad \text{פ"א:}$$

צריך לבדוק עבור $x = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 6 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=2s \end{cases} \Rightarrow s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש רק וקטור עצמי יחיד : כלומר רג=1 אבל ר"א=2 ולכן אינה לכסינה.

עבור $a = -1$:

$$(2-x)(x+2)(x-2) = -(x-2)^2(x+2) \quad \text{פ"א:}$$

צריך לבדוק עבור $x = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 6 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=2s \end{cases} \Rightarrow s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש רק וקטור עצמי יחיד : כלומר רג=1 אבל ר"א=2 ולכן אינה לכסינה.

עבור $a = 0$:

$$(2-x)(x)(x) = x^2(2-x) \quad \text{פ"א:}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 4 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x = 0$$

נבדוק מה קורה עבור $x = 0$: יחיד ולכן אינה לכסינה.

שאלה 6

נחשב פולינום אופייני ונקבל $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$.

לפי משפט קיילי המילטון : $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I = 0$ ולכן אם נעביר אגפים נקבל :

$$A^3 + 2A^2 + 3A = -4I$$

$$A(A^2 + 2A + 3I) = -4I$$

$$\cdot A \frac{(A^2 + 2A + 3I)}{-4} = I \Rightarrow \frac{(A^2 + 2A + 3I)}{-4} = A^{-1}$$

שאלה 7

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 2 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x)(-1-x) + 2 = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

כלומר קיבלנו שהפולינום פריק רק מעל המרוכבים.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-i & -1 & 0 \\ 2 & -1-i & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1-i & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x = \frac{(1+i)}{2} y \Rightarrow t \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad x = i \text{ נמצא עבור}$$

$$\cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1+i & -1 & 0 \\ 2 & -1+i & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1+i & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x = \frac{(1-i)}{2} y \Rightarrow t \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad x = -i \text{ עבור}$$

$$\cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ולכן קיבלנו שהמטריצה ההפיכה היא}$$