

תיקון

שאלה 3: נתון כי $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ הם וקטורים במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbf{R}$ המקיימים:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 1, \quad \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 2 \quad \text{חשב: } \|\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2\|$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2\| &= \sqrt{(\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2, \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2)} = \sqrt{(\vec{v}_1, \vec{v}_1) + (-2\vec{v}_2, \vec{v}_1) + (\vec{v}_1, -2\vec{v}_2) + (-2\vec{v}_2, -2\vec{v}_2)} = \\ &= \sqrt{\|\vec{v}_1\|^2 - 2(\vec{v}_2, \vec{v}_1) - 2(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + 4\|\vec{v}_2\|^2} = \sqrt{2^2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2} = 4 \end{aligned}$$

פתרון שאלה 5:

$$א. \text{ אם נעשה ג"ש נקבל } u_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ב. כיון ש $w \in \text{span}\{v_1, v_2\}$ ז"א ש $w \in \text{span}\{u_1, u_2\}$.

לפי תרגיל שהיה באחת התרצאות, קיבלנו שאם יש לנו בסיס אורתונורמלי $\{u_1, u_2\}$

וידוע ש $w \in \text{span}\{u_1, u_2\}$ כלומר $w = au_1 + bu_2$ אזי $a = \langle w, u_1 \rangle, b = \langle w, u_2 \rangle$ ולכן:

$$w = -3u_1 + 9u_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ולכן } w = -3u_1 + 9u_2$$

פתרון שאלה 7:

$$\begin{aligned} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{נפעיל ג"ש ונקבל:} \end{aligned}$$

ולכן על מנת למצוא בסיס אורתונורמלי למרחב הניצב נשים את הוקטורים בשורות נקבל:

$$\text{זהו וקטור יחיד} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x = 0.5t, y = -0.5t \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן יש רק לנרמל אותו.... אני סומכת עליכם בעיניים עצומות שתעשו זאת ☺.

שאלה 8

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} : \text{פירו QR של המטריצה}$$

$$|R| = \sqrt{2} * \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$|Q| = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$|Q^2| = |Q|^2 = (-1)^2 = 1$$

$$|A^4| = |A|^4 = |QR|^4 = (|Q||R|)^4 = 1$$

שאלה 9 :

$$\text{ניקח לדוגמה את המטריצה : } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \text{ כמובן שיש עוד הרבה... איך מצאתי אותה ?}$$

אז ככה : שימו לב שבעצם לקחתי את הוקטור הנתון ומצאתי לו מרחב ניצב. למרחב הניצב עשיתי גרם שמידט ואת כולם שמתו בשורות וכך קיבלתי מטריצה אורתוגונאלית. ולמה שמתו את כולם בשורות? שימו לב : אם ניקח n וקטורים אורתוגונלים ב R^n , לא משנה אם נשים אותם בשורות או בעמודות נקבל מטריצה אורתוגונאלית שמקיימת $Q^T Q = I$. למה ? אם שמנו את הוקטורים שלנו בשורות אזי $Q Q^T = I$. כיוון שלכל מטריצה יש רק מטריצה הפוכה אחת נקבל $Q^T = Q^{-1}$. כלומר, זה יעבוד גם בכיוון ההפוך ולכן $Q^T Q = I$. כלומר זה לא משנה אם נשים בשורות או בעמודות, בשני המקרים נקבל מטריצה אורתוגונאלית.

שאלה 10:

שימו לב : השיטה היא בדיוק כמו בשאלה הקודמת....

$$\text{מצאנו מטריצה לפי הדרוש : } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$B + 2A = 0 \Rightarrow$$

$$B = -2A \Rightarrow \text{כעת נחשב :}$$

$$|B| = |-2A| = (-2)^3 |A| = -8 * (-1) = 8$$

$$? A \quad \text{אבל איך חישבתי את הדטר' של } A \quad |A|^{1995} = |A|^{1995} = (-1)^{1995} = -1$$

יש לומר משהו חשוב לגבי דטרמיננטה של מטריצות אורתוגונאליות (ריבועיות כמובן) :

$$Q^T Q = I \Rightarrow$$

$$|Q^T Q| = |I| \Rightarrow$$

$$|Q^T| |Q| = 1 \Rightarrow$$

$$|Q|^2 = 1 \Rightarrow |Q| = \pm 1$$

כלומר קיבלנו שמאד קל לחשב את הדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונאלית .