

פתרון תרגיל 8

מכפלה פנימית

שאלה 1: הוכח כי אם v_1, v_2, v_3, v_4 הם וקטורים במרחב מכפלה פנימית המקיימים:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 3 \quad \text{if } i = j$$

אזי $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$.

$$\langle v_i, v_j \rangle = -1 \quad \text{if } i \neq j$$

הוכחה: לפי תכונה 1 של מכפלה פנימית $u = 0 \Leftrightarrow \langle u, u \rangle = 0$

נשתמש בנתונים ונראה כי $\langle v_1 + v_2 + v_3 + v_4, v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \rangle = 0$

ואז נסיק את המסקנה ש- $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$

$$\begin{aligned} \langle v_1 + v_2 + v_3 + v_4, v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \rangle &= \\ \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_1, v_4 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle + \langle v_2, v_4 \rangle + \\ \langle v_3, v_1 \rangle + \langle v_3, v_2 \rangle + \langle v_3, v_3 \rangle + \langle v_3, v_4 \rangle + \langle v_4, v_1 \rangle + \langle v_4, v_2 \rangle + \langle v_4, v_3 \rangle + \langle v_4, v_4 \rangle &= \\ = 3 - 1 - 1 - 1 - 1 + 3 - 1 - 1 - 1 - 1 + 3 - 1 - 1 - 1 - 1 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

שאלה 2: יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית.

א. יהי $u \in V$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $\langle u, v \rangle = 0$. הוכח כי $u = 0$.

הוכחה:

א. יהי $u \in V$ כך שלכל $v \in V$, $\langle u, v \rangle = 0$, בפרט גם עבור וקטור $v = u$ (כי הוא גם וקטור ב- V),

אזי $u = 0 \Leftrightarrow \langle u, u \rangle = 0$. רק $u = 0$ ניצב לכל וקטורים ב- V .

שאלה 3: נתון כי $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ הם וקטורים במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbf{R}$ המקיימים:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 1, \quad \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 2. \quad \text{חשב: } \|\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2\|$$

פתרון:

$$\|v_1 - 2v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \langle v_1, -2v_2 \rangle + \langle -2v_2, v_1 \rangle + \| -2v_2 \|^2 = \|v_1\|^2 - 4\langle v_1, v_2 \rangle + 4\|v_2\|^2 = 4 - 4 + 16 = 16$$

שאלה 4: א. יהי $W := \text{span}\{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, 3, 2)\}$ תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$, עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית: $\langle (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3) \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$. מצא בסיס אורתונורמלי עבור W .
 ב. יהי W תת-מרחב של R^4 , ונוצר ע"י קבוצת הוקטורים $(1, 1, 1, 4), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)$.

מצא בסיס אורתונורמלי ל- W ובסיס אורתונורמלי ל- $W^\perp$

פתרון:

א. נהפוך את הבסיס של W $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ לבסיס אורתונורמלי.

$$1. \quad w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- נהפוך את הבסיס האורתוגונאלי שקיבלנו $\{w_1, w_2\}$ לבסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \|w_1\| = \sqrt{2}, \quad \|w_2\| = \sqrt{11}$$

ב. בסיס אורתונורמלי ל- W קבוצה שפורשת את W היא ת"ל, לכן נהפוך אותה לבסיס:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1. \quad w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- נהפוך את הבסיס האורתוגונאלי שקיבלנו $\{w_1, w_2\}$ לבסיס אורתונורמלי:

$$\text{בסיס אורתונורמלי של } W \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \Leftarrow \|w_1\| = \sqrt{4} = 2, \quad \|w_2\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

נמצא את $W^\perp$ -> קבוצה פורשת -> בסיס אורתונורמלי.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{cases} x + y + z - 3w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \right\} = W^\perp$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = W^\perp$$

$$1. \quad w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ בסיס של } W^\perp$$

- נהפוך את הבסיס האורתוגונאלי שקיבלנו $\{w_1, w_2\}$ לבסיס אורתונורמלי:

$$\text{בסיס אורתונורמלי של } W^\perp \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Leftarrow \|w_1\| = \sqrt{2}, \quad \|w_2\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$