

דטרמיננטות

1.

$$\det(0) = 0 \quad \text{ד} \quad \det(-42) = -42 \quad \text{ג} \quad \det(-7) = -7 \quad \text{ב} \quad \det(5) = 5 \quad \text{א}$$

2.

חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הריבועיות מסדר 2×2 הבאות:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -5 \quad \text{ב} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0 \quad \text{א}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} = -48 \quad \text{ה} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ו} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0 \quad \text{ג}$$

$$\det \begin{pmatrix} 8 & 90 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ז} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ח} \quad \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 9 \quad \text{ט} \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -6 \quad \text{י}$$

$$\det \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = 26 \quad \text{יא} \quad \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 16 \quad \text{יב}$$

$$\det \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 3+i \end{pmatrix} = i \cdot (3+i) - (1+i) \cdot (1-i) = 3i - 1 - 2 = -3 + 3i \quad \text{יג}$$

3.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 8 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 2 = 24 + 24 - 24 - 24 = 0 \quad \text{א}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -8 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ו} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ג} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} = 33 \quad \text{ב}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -24 \quad \text{ז} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 24 \quad \text{ח} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ה}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 18 \quad \text{י} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{יב} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \quad \text{יג}$$

4.

חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

$$\text{det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -16 \quad \text{א.}$$

$$\text{det} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{4+4} \cdot \text{det} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 = 6 \quad \text{ב. נפתח לפי שורה אחרונה:}$$

$$\text{det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 22 & 234 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ג. שורה 1 ושורה 4 תלויים ליניארית ולכן}$$

$$\text{det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -40 \quad \text{ה.} \quad \text{ד.} \quad \text{det} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 99 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{det} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ו. שורה 1 ושורה 4 תלויים ליניארית (כנ"ל עמודות 1 ו-4):}$$

$$\text{det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 223 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ז. שורה 1 ושורה 4 תלויים ליניארית:}$$

$$\text{det} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 4 \\ 45 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 45 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \text{det} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} = -45 \cdot 0 = 0 \quad \text{ח. פיתוח לפי עמודה 1:}$$

$$\text{det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ט. שורות 4,5 תלויות ליניארית}$$

$$\text{det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -5$$

.5

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \end{pmatrix} .8$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} -14 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{-12}{-4} = 3, x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{20}{-4} = -5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix} .9$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 13 & 0 & 1 \\ 14 & 2 & 4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{-60}{-20} = 3, x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 13 & 1 \\ 0 & 14 & 4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{20}{-20} = -1, x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 13 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{-80}{-20} = 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} .9$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 11 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-327}{-327} = 1, x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 11 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{0}{-327} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 11 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-327}{-327} = 1, x_4 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 3 & 11 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{0}{-327} = 0$$

6. מטריצה הפוכה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \det(0) & -\det(1) \\ -\det(1) & \det(0) \end{pmatrix} = -\frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .\text{א.}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \det(2) & -\det(7) \\ -\det(1) & \det(3) \end{pmatrix} = -\frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} .\text{ב.}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \det(2) & -\det(-3) \\ -\det(-3) & \det(3) \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} .\text{ג.}$$

$$\text{עמודות תלויות ליניארית לכן מטריצה לא הפיכה} \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} .\text{ד.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{48} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -24 \\ 0 & -6 & 0 \\ -16 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .\text{ה.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .\text{ו.}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .\text{ז.}$$

7. דטרמיננטה פונקצית נפח.

:

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = |0| = 0 \quad \text{ג.} \quad \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right| = |0| = 0 \quad \text{ב.} \quad \left| \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = |6| = 6 \quad \text{א.}$$

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \right| = |-56| = 56 \quad \text{ד.}$$

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 8 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \right| = |-60| = 60 \quad \text{ה.} \quad \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \right| = |30| = 30 \quad \text{ו.}$$

$$\left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \right| = |-2| = 2 \quad \text{ז.} \quad \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = |6| = 6 \quad \text{ו.}$$