

פתרון תרגיל 5

א.1

$$x \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 8 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+4z=0 \\ 2x+y+7z=0 \\ -x-3y+0z=0 \\ 3x-y+8z=0 \\ x+y+4z=0 \\ 5x-2y+13z=0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 13 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_4-3R_1, R_5-R_1, R_6-5R_1]{R_2-2R_1, R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -57 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -57 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x = y = z = 0$$

ולכן כולם בת"ל...

ג.

$$x(1, a, a) + y(2a, 1, 0) + z(a-1, 1, a) = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & a-1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3-aR_1]{R_2-aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-2a^2 & 1+a-a^2 & 0 \\ 0 & -2a^2 & 2a-a^2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & -2a^2 & 2a-a^2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+2a^2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -a(2a^2-a-2) & 0 \end{array} \right)$$

קיבלנו שעבור $a=0, a=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$ ישנם אינסוף פתרונות למערכת ולכן הוקטורים תלויים. עבור

כל a אחר נקבל שלמערכת פתרון יחיד וזהו הפתרון הטריטויאלי $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן הוקטורים בת"ל.

2. נשתמש בדוגמה נגדית שנקרא לה * : $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = R^3$ לחלק מהסעיפים :

א. לא נכון ! קבוצה זו אכן בתל אך אנו יכולים להוסיף לה וקטור לדוגמה $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

והיא תישאר בתל.

ב. לא נכון ! אותו טיעון כמו א.

ג. לא נכון ! נשתמש בדוגמה $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ אם נוריד את אחד הוקטורים היא תשאר ת"ל...

ד. לא נכון ! לפי * , נוסיף לה את הוקטור $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ והיא כבר לא בת"ל.

ה. לא נכון ! לדוגמה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ת"ל אבל קיים בה וקטור שאני צי"ל של השאר.

ו. לא נכון ! מהדוגמה הקודמת ניקח את שני הוקטורים $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ והרי לנו

קבוצה בת"ל.

ז. נכון ! נאמר רק הוכחה ב"נפנופי ידיים" : נניח בשלילה שלא ולכן לקבוצה בת"ל קיימת תת קבוצה תלויה מה שאומר שגם הקבוצה המקורית תלויה – בניגוד להנחה הראשונית....