

פתרון תרגיל 4

מרחבים וקטוריים

♦ בדקו האם W הוא תת-מרחב של V :

א עבור $V = \mathbb{R}^2$,

$$1. \quad W = \{(a, a^3) : a \in \mathbb{R}\} \quad - \text{ אינו ת"מ וקטורי} - \text{ אין סגירות לכפל בסקלר}$$

לדוגמה אם נכפיל ב- 3 ...

$$2. \quad W = \{(a, b) : 2a + 3b = 0, a, b \in \mathbb{R}\} \quad - \text{ ת"מ וקטורי} - \text{ שומר על סגירות לחיבור}$$

וכפל בסקלר וכן וקטור האפס נמצא כי מקיים את התנאים.

ב עבור $V = \mathbb{R}^5$,

$$3. \quad W = \{(a, b, c, d, e) : a + b + c + e + d = 5\} \quad - \text{ וקטור האפס לא נמצא- אינו}$$

ת"מ.

$$4. \quad W = \{(a, b, c, d, e) : a = b = c = d = e\} \quad - \text{ ת"מ.}$$

ד עבור $V = \mathbb{F}^{n \times n}$,

$$5. \quad W = \text{אוסף מטריצות אנטי-סימטריות מעל } \mathbb{F} \quad - \text{ ת"מ וקטורי.}$$

$$6. \quad W = \text{אוסף מטריצות אלכסוניות מעל } \mathbb{F} \quad - \text{ ת"מ וקטורי}$$

$$7. \quad W = \text{אוסף מטריצות עם עקבה 0 מעל } \mathbb{F} \quad - \left(\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + \dots + a_{nn} = 0 \right)$$

ת"מ וקטורי

$$8. \quad \text{תהי } A \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad W = \{B \in \mathbb{F}^{n \times n} : BA = AB\} \quad - \text{ ת"מ וקטורי. הוכחה:}$$

תחילה נוכיח שמטריצת האפס נמצאת ב- W : $0A = A0 = 0$ כלומר מקיימת את

התנאי ולכן $0_{n \times n} \in W$.

נראה סגירות לחיבור ולכפל בסקלר: יהיו $a \in F, B, C \in W$.

$$(aB + C)A = aBA + CA = aAB + AC = AaB + AC = A(aB + C) \Rightarrow aB + C \in W$$

מש"ל.