

פתרון תרגיל 5

1. א. שימו לב שהפתרון מתקבל בצורה מידית כאשר מגדירים: $x_3 = a, x_5 = b$

ומשתמשים במשוואות המטריצה...

$$\begin{pmatrix} 2a-3b \\ 5a-2b \\ a \\ -3b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 5a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3b \\ -2b \\ 0 \\ -3b \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

ג. שימו ♥ - קיבלנו ש $N(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, הוקטורים הם בת"ל

ופורשים את $N(A)$ ולכן הם הבסיס לתת מרחב זה .

2. נשים את הוקטורים בעמודות מטריצה ונדרג אותה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2 \leftrightarrow R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 + R_2 + R_3 + R_1 \rightarrow R_4}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש צירים רק בשלוש העמודות הראשונות ולכן הוקטורים שהיו בעמודות אלו הם בת"ל. כל השאר תלויים בהם ולכן הקבוצה המקסימלית

היא : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. שימו לב ! אם היינו שמים את הוקטורים

במטריצה בסדר אחר היינו מקבלים וקטורים אחרים בקבוצה כי כולם בעצם תלויים בכולם...

בס"ד

(3) אם $\{w_1, w_2, w_3\}$ בת"ל, נבדוק אם הקבוצה $\{w_2 + w_3, w_1 + w_3, w_1 + w_2\}$ היא בת"ל
 , כלומר אם קיימים סקלרים α, β, γ , לא כולם 0 שיתנו את צירוף ה-0:

$$\alpha(w_2 + w_3) + \beta(w_1 + w_3) + \gamma(w_1 + w_2) = 0$$

$$\alpha w_2 + \alpha w_3 + \beta w_1 + \beta w_3 + \gamma w_1 + \gamma w_2 = 0$$

$$(\beta w_1 + \gamma w_1) + (\alpha w_2 + \gamma w_2) + (\alpha w_3 + \beta w_3) = 0$$

$$(\beta + \gamma)w_1 + (\alpha + \gamma)w_2 + (\alpha + \beta)w_3 = 0$$

אבל ידוע ש: $\{w_1, w_2, w_3\}$ הם בת"ל ולכן $(\beta + \gamma) = (\alpha + \gamma) = (\alpha + \beta) = 0$

אבל מהשוויונות נובע ש: $\alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow$ ולכן גם הקבוצה

$\{w_2 + w_3, w_1 + w_3, w_1 + w_2\}$ היא בת"ל.

(4) אם $\{w_1, w_2, w_3\}$ בת"ל, נבדוק אם הקבוצה $\{w_2 - w_3, w_1 - w_3, w_1 - w_2\}$ היא בת"ל
 , כלומר אם קיימים סקלרים α, β, γ , לא כולם 0 שיתנו את צירוף ה-0:

$$\alpha(w_2 - w_3) + \beta(w_1 - w_3) + \gamma(w_1 - w_2) = 0$$

$$\alpha w_2 - \alpha w_3 + \beta w_1 - \beta w_3 + \gamma w_1 - \gamma w_2 = 0$$

$$(\beta w_1 + \gamma w_1) + (\alpha w_2 - \gamma w_2) + (-\alpha w_3 - \beta w_3) = 0 :$$

$$(\beta + \gamma)w_1 + (\alpha - \gamma)w_2 + (-\alpha - \beta)w_3 = 0$$

אבל ידוע ש: $\{w_1, w_2, w_3\}$ הם בת"ל ולכן $(\beta + \gamma) = (\alpha - \gamma) = (-\alpha - \beta) = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) :$$

קיבלנו שיש למערכת אינסוף פתרונות (ולא רק פתרון ה-0) ולכן הקבוצה

$\{w_2 - w_3, w_1 - w_3, w_1 - w_2\}$ היא ת"ל !

(5) א. ניתן לראות בקלות שהוקטורים: $\{(1 \ 1 \ -1), (-1 \ -1 \ 1)\}$ הם תלויים

ליניארית: $(1, 1, -1) = -1(-1, -1, 1) \Rightarrow \text{span}\{(1, 1, -1), (-1, -1, 1)\} = \text{span}\{(1, 1, -1)\}$

כלומר הם פורשים ישר בלבד !

ב. אמרנו שוקטור ה-0 תלוי ליניארית בכל קבוצה של וקטורים אבל שני

הוקטורים האחרים לא תלויים אחד בשני ולכן הם פורשים מישור .

ג. אם יש שני צירים זה אומר שיש 2 וקטורים בת"ל ולכן פורשים מישור.

ד. ניקח לדוגמא שלושה וקטורים בעלי מרכיבים חיוביים: $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 4)$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) :$$

ונבדוק אם הם תלויים:

קיבלנו שיש ציר בכל עמודה ולכן הם בת"ל ולהזכירכם אם ב- $\mathbb{R}^3$ יש 3

וקטורים בת"ל הם בסיס ל $\mathbb{R}^3$ ולכן פורשים אותו !

(6) הם פורשים מרחב ממימד n והם בסיס למרחב זה..

7 א. הוקטורים עם מרכיבים שווים : $(x, x, x, x) = x(1, 1, 1, 1) = \text{span}\{(1, 1, 1, 1)\}$ נפרשים ע"י הוקטור $(1, 1, 1, 1)$ שהוא הבסיס.

ב. וקטור שמרכיביו מסתכמים ל-0 נראה כך :

$$(x, y, z, -x - y - z) = x(1, 0, 0, -1) + y(0, -1, 0, -1) + z(0, 0, -1, -1)$$

הוקטורים : $\{(1, 0, 0, -1), (0, -1, 0, -1), (0, 0, -1, -1)\}$.

ג. הוקטורים שניצבים לוקטורים $\{(1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1)\}$ הם הוקטורים (x, y, z, w) שמקימים :

$$(1, 0, 1, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0, (1, 1, 0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$z = t, w = s,$$

$$II : y - t = 0 \Rightarrow y = t, I : x + s + t = 0 \Rightarrow x = -s - t$$

$$(-s - t, t, t, s) = (-s, 0, 0, s) + (-t, t, t, 0) = s(-1, 0, 0, 1) + t(-1, 1, 1, 0)$$

קיבלנו שהמרחב נפרש ע"י שני וקטורים $(-1, 0, 0, 1), (-1, 1, 1, 0)$ (בת"ל) והם הבסיס !

$$D. \text{ במטריצה : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מרחב השורות נפרש ע"י השורות שניתן לראות שהן בת"ל ולכן הן הבסיס.

במרחב העמודות נמצאים שני הוקטורים של הבסיס הטרוויאלי : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ שפורשים כמובן את

כל $\mathbb{R}^2$ וכל השאר הם חזרות נקבל שהם הסיס למרחב העמודות.

$$x - 2y + 3z = 0 \Rightarrow x = 2y - 3z \Rightarrow (2y - 3z, y, z) = (2y, y, 0) + (-3z, 0, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) \quad (8)$$

המרחב נפרש ע"י הוקטורים $(2, 1, 0), (-3, 0, 1)$ והם בת"ל ולכן בסיס.

$$(9) \quad \begin{array}{l} A : c = 0, d = 2 \\ B : c \neq \pm d \end{array} \quad \text{לגבי } A \text{ הפתרון ברור, לגבי } B \text{ ננסה לדרג :}$$

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \xrightarrow{cR_2 - dR_1} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^2 - d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank } B = 2 \Leftrightarrow c^2 - d^2 \neq 0 \Leftrightarrow (c - d)(c + d) \neq 0 \Leftrightarrow c \neq \pm d$$

$$(10) \text{ א. } \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{basis}} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. המט הסימטריות נראות :

$$\begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{basis}} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

והמטריצות הן בת"ל ולכן בסיס !

(11) אני סומכת עליכם...

(12) שימו לב ! (כן, בטח לא שמתם לב שאני אוהבת את הביטוי...☺) מרחב העמודות משתנה לאחר דירוג ולכן אנו מתייחסים תמיד לעמודות המקוריות שבמטריצה **לפני** הדירוג אבל מרחב השורות **לא משתנה** (כי אנחנו בעצם עושים צירופים ליניאריים של השורות ולכן נשארים במרחב !!!) ולכן בשביל מרחב השורות נסתפק בשורות המטריצה המדורגת : הן בת"ל וכמובן שפורשות את מרחב השורות ולכן הן הבסיס : $\{(1,3,2)(0,1,1)\}$

לעומת זאת במרחב העמודות נסתכל רק על הצירים במטריצה המדורגת : יש צירים בעמודות הראשונה השנייה ולכן עמודות אלו **במטריצה המקורית** הם בת"ל ולכן בסיס למרחב העמודות : $\{(1,0,1)(3,1,3)\}$.

מרחב האפס לפני הדירוג הוא אותו מרחב לאחר הדירוג : (משמאל לימין) :

$$Ax = 0 \Leftrightarrow LUX = 0 \Leftrightarrow L^{-1}LUX = L^{-1}0 \Leftrightarrow UX = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow z = t, y = -t, x + 3(-t) + t = 0 \Rightarrow x = 2t \Rightarrow (2t, -t, t) = t(2, -1, 1)$$

(13) אם למטריצה 5 צירים זה אומר שמימד מרחב העמודות הוא 5 . כיון שמימד מרחב העמודות שווה לממד מרחב השורות גם הוא 5 . מרחב השורות נמצא ב $\mathbb{R}^9$, וסכום הממדים של מרחב השורות ומרחב האפס הוא 9 ולכן מימד מרחב האפס הוא 4 . מרחב העמודות נמצא ב- $\mathbb{R}^7$ וסכום המימדים שלו ושל מרחב האפס השמאלי הוא 7 ולכן מימד מרחב האפס השמאלי הוא 2 .

(14) הוקטורים בסופי השורה הם הבסיסים :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow C(A) &= \text{span}\{(1,2)\} \\ \Rightarrow C(A^T) &= \text{span}\{(1,2,4)\} \\ \Rightarrow N(A) &= x + 2y + 4z = 0 \Rightarrow x = -2y - 4z \Rightarrow (-2y - 4z, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-4, 0, 1) \\ \Rightarrow N(A^T) &= x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \Rightarrow (-2y, y) = y(-2, 1) \end{aligned}$$

(15)

$$V = \text{span}\{(2,1,0), (1,1,1)\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(A^T) = V.$$

$$N(A) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow (z, -2z, z) = z(-1, 2, 1)$$

קיבלנו שהוקטורים המאונכים לוקטורים במרחב V הם מהצורה $z(-1,2,1)$
 $\Rightarrow B = (1, -2, 1) \Rightarrow N(B) = V$

(16)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והשאר ...

$$C(A^T) = \text{span}\{(0,3,3,3)(0,1,0,1)\}$$

$$C(A) = \text{span}\{(3,0,1)(3,0,0)\}$$

$$N(A^T) = \text{span}\{(0,1,0)\}$$

(17) מרחב השורות נפרש ע"י שורות U , בעוד שמרחב העמודות נפרש ע"י עמודות L
הוכחה במטריצות 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix} =$$

קיבלנו שכל

$$\left(b_{1,1} \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix} + b_{2,1} \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}, b_{1,2} \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix} + b_{2,2} \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} \right)$$

עמודה במטריצת המכפלה היא צי"ל של העמודות המטריצה השמאלית ולכן

$$C(A) = \text{span}\{(1,6,9)(0,1,8)(0,0,1)\}$$

אם $A = LU$ נקבל שהבסיסים:

$$C(A^T) = \text{span}\{(1,2,3,4)(0,1,2,3)(0,0,1,2)\}$$

(18) אם הוקטור $(1,0,-1)$ הוא גם שורה ב- A וגם במרחב האפס שלה נקבל ש:

$$(1,0,-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

המכפלה הסקלרית שלו עם עצמו צריכה להיות 0

אבל בפועל יוצא אחרת !

(19) אתם כבר יודעים מצוין את החומר, קטן עליכם....

בהצלחה רבה לכולכם....
מיטל.