

מבחן באלגברה לינארית 1

סמסטר א' ה'תשס"ח (3/2/08)
יום א', כ"ז שבט ה'תשס"ח (3.2.08)

מתרגלות: אושרית אוברוצקי ומיטל אליהו.

מספר קורס: 83-110

חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר.

משך הבחינה: שעתיים.

הנחיות:

- יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
- אם שאלה מסויימת אינה ברורה, או שנראה לך כי יש בה טעות, נא כתוב לפני התשובה כיצד הבנת את השאלה והבודק יתחשב אם יש מקום לכך.
- המבחן הוא רב-ברירתי (Multiple Choice). יש לענות על גבי הטופס: הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. במקרה שיש יותר מתשובה נכונה אחת, יש להקיף את התשובה הנכונה המלאה והמזוייקת ביותר. חובה לענות על כל השאלות. סמן את התשובה בצורה ברורה. לטיוטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד.
- יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (סעיף הבחינה).
מחברת/פרטים.
- שים לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

סימונים:

- $\mathbb{F}^{m \times n} = M_{m \times n}(\mathbb{F})$ המטריצות $m \times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$.
- $A^t = A^T$ המטריצה המשוחלפת של A .
- $N(A)$ מרחב האפס של המטריצה A .
- $R(A)$ מרחב השורות של המטריצה A .
- $C(A)$ מרחב העמודות של המטריצה A .
- $|A| = \det(A)$ הדטרמיננטה של המטריצה A .
- $\text{span}(S) = \text{Sp}(S) = \text{Span}(S)$.

השאלות

שאלה 1. נתון תת-מרחב $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + w = 0\}$ של $\mathbb{R}^4$. איזה מהקבוצות הבאות היא בסיס עבור V ?

- $\{(1, 2, 0, 1), (0, 1, 3, -2), (2, 1, -9, 8)\}$
- $\{(1, 3, 4, -2), (1, 4, 7, -4), (1, 5, 11, -7)\}$
- $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
- $\{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 1, 1, 0)\}$

שאלה 2. יהיו $v_1, \dots, v_7$ בלתי תלויים לינארית ב $\mathbb{R}^n$ אזי בהכרח:

א. $7 < n$

ב. $n < 7$

ג. $7 \leq n$

ד. $n \leq 7$

שאלה 3. נתונה מטריצה $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ בעלת שני ערכים עצמיים שונים, λ_1, λ_2 . יהיו $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$ המרחבים העצמיים השייכים ל λ_1, λ_2 , בהתאמה. בהכרח:

א. $|A| = -7$

ב. $V_{\lambda_1}^\perp = V_{\lambda_2}$

ג. A אינה ניתנת לליכסון.

ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

שאלה 4. נתון ש $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ פתרון מקורב (בשיטת LS) למערכת $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. למה שווה $x_1 + x_2$?

א. 2.4

ב. 10.4

ג. 6

ד. 14

שאלה 5. נתונה מערכת משוואות עם פרמטר מעל $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$. בהכרח:

א. יש λ כך שלמערכת אין פתרון, ויש λ כך שלמערכת פתרון יחיד.

ב. כל התשובות נכונות.

ג. יש λ כך שלמערכת אינסוף פתרונות, ויש λ כך שלמערכת אין פתרון.

ד. יש λ כך שלמערכת אינסוף פתרונות, ויש λ כך שלמערכת פתרון יחיד.

שאלה 6. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה כך ש $A + A^3$ הפיכה. אזי בהכרח:

א. A אינה הפיכה.

ב. A^3 אינה הפיכה.

ג. יש $b \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ יש יותר מפתרון אחד.

ד. $(A^t)^2 + I$ הפיכה.

שאלה 7. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, ונתון ש $m < n$. בהכרח:

- א. $\dim R(A) < \text{rank } A$.
- ב. $\dim R(A) + \dim C(A) < n$.
- ג. $\dim R(A) + \dim C(A) = n$.
- ד. $\dim N(A^t) + \dim R(A) < n$.

שאלה 8. מהו סכום אברי המטריצה R בפירוק QR של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

- א. 6.
- ב. -4.
- ג. -2.
- ד. 2.

שאלה 9. יהא V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v, w \in V$ כך ש $\|v\| = \|w\| = 1$, והזית בין v, w היא 60° . אזי $\|2v + 3w\|$ היא:

- א. 19.
- ב. $2\|v\| + 2\|w\|$.
- ג. $2^2\|v\| + 3^2\|w\|$.
- ד. $\sqrt{19}$.

שאלה 10. נתונה מטריצת הטלה $P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. בהכרח:

- א. P יש ערך עצמי $\lambda \neq 0, 1$.
- ב. P מטילה וקטורים ב $\mathbb{R}^3$ על $\text{span}\{(6, 2, 4)^t, (3, 1, 2)^t\}$.
- ג. P מטריצת הטלה על מישור $X - Y$.
- ד. P מטילה וקטורים ב $\mathbb{R}^3$ על $\text{span}\{(6, 3, 9)^t, (4, 2, 6)^t\}$.

שאלה 11. תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. מטריצה מעל $\mathbb{Z}_3$. הרכיב בעמודה הראשונה של השורה שניה של A^{-1} הוא:

- א. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
- ב. 0.
- ג. 2.
- ד. 1.

שאלה 12. נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$. הערכים העצמיים של A הם:

- א. 1 בריבוי אלגברי 2, 4 בריבוי אלגברי 1.
- ב. 2 בריבוי אלגברי 3.
- ג. -2 בריבוי אלגברי 3.
- ד. -1 בריבוי אלגברי 2, -4 בריבוי אלגברי 1.

שאלה 13. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ מטריצה מעל $\mathbb{Z}_2$. המרחב הניצב למרחב העמודות של A הוא:

- א. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.
- ב. $(\mathbb{Z}_2)^3$.
- ג. $\{(0, 0, 0)\}$.
- ד. מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית מעל $\mathbb{Z}_2$ אשר A מטריצת המקדמים שלה.

שאלה 14. נתון: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$. מצא את הערך של הדטרמיננטה: $\begin{vmatrix} 3a+15b & 3b & 3c \\ d+5e & e & f \\ g+5h & h & i \end{vmatrix}$.

- א. $2/3$.
- ב. 6.
- ג. 30.
- ד. $2/15$.

שאלה 15. יהא $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. אזי z^{2008} שווה ל:

- א. z^2 .
- ב. z^3 .
- ג. z^0 .
- ד. z^1 .

בהצלחה!