

תרגיל 8

מכפלה פנימית

שאלה 1: הוכח כי אם v_1, v_2, v_3, v_4 הם וקטורים במרחב מכפלה פנימית המקיימים:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 3 \quad \text{if } i = j$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = -1 \quad \text{if } i \neq j$$

אזי $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$.

שאלה 2: יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית.
א. יהי $u \in V$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $\langle u, v \rangle = 0$. הוכח כי $u = 0$.

שאלה 3: נתון כי $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ הם וקטורים במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ המקיימים:
 $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 1$, $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 2$. חשב: $\|\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2\|$.

שאלה 4: א. יהי $W := \text{span}\{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, 3, 2)\}$ תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$, עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית: $\langle (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3) \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$. מצא בסיס אורתונורמלי עבור W .
ב. יהי W תת-מרחב של $\mathbb{R}^4$, ונוצר ע"י קבוצת הוקטורים $(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 4)$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- W ובסיס אורתונורמלי ל- $W^\perp$.

שאלה 5:

ב- $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, נתונים שני וקטורים: $v_1 = (1, 2, 2)$ ו- $v_2 = (6, 0, 6)$.
א. מצא בסיס אורתונורמלי $\{u_1, u_2\}$ ל- $\text{sp}\{v_1, v_2\}$.
ב. נתון ש- $w \in \text{sp}\{v_1, v_2\}$ והוא מקיים: $\langle w, u_1 \rangle = -3$ ו- $\langle w, u_2 \rangle = 9$. חשב את w .

שאלה 6:

נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^4$:
 $u_1 = (1, 0, 0, 1)$; $u_2 = (0, 1, 1, 0)$; $u_3 = (2, 0, 1, 0)$
יהא $W = \text{sp}\{u_1, u_2, u_3\}$.
א. מצא בסיס אורתונורמלי ל- W .

שאלה 7:

נתונה המטריצה $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. יהא U מרחב השורות של B .
א. מצא בסיס אורתונורמלי של U (לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית).
ב. מצא בסיס אורתונורמלי של המשלים האותוגונלי $U^\perp$.

שאלה 8:

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. נסמן ב- v_1 את העמודה הראשונה של A , וב- v_2 את העמודה השנייה של A .

א. הפעל את תהליך גרס-שמידט על $\{v_1, v_2\}$ כדי לקבל קבוצה אורתונורמלית $\{u_1, u_2\}$, וסמן

ב- Q את המטריצה שהעמודה הראשונה שלה היא u_1 והעמודה השנייה היא u_2 .

ב. מצא מטריצה R כך ש- $A = QR$.

ג. מהי הדטרמיננטה של R ?

ד. מהי הדטרמיננטה של Q^2 ?

ה. מהי הדטרמיננטה של A^4 ?

שאלה 9

מצא מטריצה אורתוגונלית שהשורה הראשונה שלה היא כפולה של $(1, 0, 1)$.

שאלה 10

נתון הוקטור: $v_1 = \frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}}$ ב- R^3 .

א. בנה מטריצה אורתוגונלית וסימטרית A ששורתה הראשונה היא v_1 .

ב. נתון $B + 2A = 0$. מצא את הדטרמיננטה של B .

ג. מצא את $\det(A^{1995})$.

שאלה 11

יהיו $v_1 = (1, 0, -1)$ ו- $v_2 = (1, -1, 0)$.

א. יהי $W = \text{sp}\{v_1, v_2\}$. מצא בסיס אורתונורמלי $\{u_1, u_2\}$ ל- W והשלם אותו לבסיס

אורתונורמלי $\{u_1, u_2, u_3\}$ של R^3 .

ב. תהי A המטריצה ששורותיה הן u_1, u_2, u_3 ותהי B מטריצה המקיימת $2B + A^{-1} = 0$.

מצא את הדטרמיננטה של B^2 .

נקודה חשובה למחשבה:

ההפכית של כל מטריצה אורתוגונלית היא גם מטריצה אורתוגונלית!

למה? מה זה אומר?