

תרגיל 6 באלגברה ליניארית

תרגיל זה מכיל גם תיאוריה וגם תרגילי חישוב. אין צורך לענות על כולם ☺

1. דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מממד 1×1 : $A = (a_{11})$ ניתנת ע"י $\det A = \det(a_{11}) = a_{11}$
דוגמא: $\det(-12) = -12$

חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הריבועיות מסדר 1×1 הבאות:
א. (5) ב. (-7) ג. (-42) ד. (0)

2. דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מממד 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21}$$

ניתנת ע"י

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) = 6 + 5 = 11$$

דוגמא:

חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הריבועיות מסדר 2×2 הבאות:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$ ה. $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ ו. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ז. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ח. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ט. $\begin{pmatrix} 8 & 90 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ י. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ יא. $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ יב. $\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 3+i \end{pmatrix}$

3. דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מממד 3×3 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 5 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 1 = 12$$

דוגמא:

חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הריבועיות מממד 3×3 הבאות:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -8 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ה. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ו. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ז. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ח. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ט. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ י. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ יא. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ יב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} : n \times n \text{ מטריצות ממימד}$$

נסמן A_{ij} המטריצה המתקבלת מ-A ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j.
 נוסחא לחישוב דטרמיננטה של מטריצות ממימד $n \times n$ המתקבלת ע"י פיתוח השורה ה-i:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

נוסחא לחישוב דטרמיננטה של מטריצות ממימד $n \times n$ המתקבלת ע"י פיתוח העמודה ה-j:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

דוגמא: פיתוח של מטריצה 4×4 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ לפי השורה השניה.

$$\det A = \sum_{j=1}^4 (-1)^{2+j} \cdot a_{2j} \cdot \det A_{2j} =$$

$$(-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \det A_{21} + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot \det A_{22} + (-1)^{2+3} \cdot a_{23} \cdot \det A_{23} + (-1)^{2+4} \cdot a_{24} \cdot \det A_{24} =$$

$$-3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$-3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = -8$$

חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 99 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 22 & 234 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 4 \\ 45 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 223 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

רמז: בתרגיל זה ניתן לקצר חלק גדול מהחישובים ע"י שימוש בתכונות מטריצות בלוקים ותלות של שורות/עמודות.
5. כלל קרמר

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (C_1 \quad \cdots \quad C_j \quad \cdots \quad C_n) \text{ אזי } C_j \text{ -ב-} j$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \text{נסמן עמודות בעלמים ב-} x \text{ ועמודות מקדמים חופשים ב-} b$$

אזי פתרון מערכת המשוואות $Ax = b$ ניתן ע"י:

$$x_i = \frac{\det(C_1 \quad \cdots \quad C_{i-1} \quad b \quad C_{i+1} \quad \cdots \quad C_n)}{\det A}, i=1 \dots n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ כלומר } \begin{cases} 0 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = 4 \\ 3 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y + 4 \cdot z = 8 \end{cases} \text{ דוגמא:}$$

הפתרון עפ"י כלל קרמר:

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{16}{-16} = -1, x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{-16}{-16} = 1, x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{-32}{-16} = 2$$

בעזרת כלל קרמר פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ א. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ ב. } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ ג.}$$

$$2x + y + z = 3$$

$$5x + 3y + z = 4$$

אתגר: פתרו באמצעות כלל קרמר את המערכת הבאה:

6. מטריצה הפוכה

ניזכר סימנו A_{ij} המטריצה המתקבלת מ-A ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j.

נסמן $AdjA_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$ אזי

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} AdjA = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} AdjA_{11} & \dots & AdjA_{1j} & \dots & AdjA_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ AdjA_{i1} & \dots & AdjA_{ij} & \dots & AdjA_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ AdjA_{n1} & \dots & AdjA_{nj} & \dots & AdjA_{nn} \end{pmatrix}$$

דוגמא במקרה של מטריצה ממימד 3×3 :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{23} \\ \det A_{13} & -\det A_{32} & \det A_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

מצא באותו אופן את המטריצות ההופכיות של המטריצות הבאות במידה וקיימות:

א. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

ה. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ז. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ח. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ט. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$