— דוגמאות לחישוב פולינום מינימלי של מ' —

1. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x - 5/2 & 1/2 \\ -1/2 & x - 3/2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - \tfrac{5}{2})(x - \tfrac{3}{2}) + \tfrac{1}{4} = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

לכן, $m_A(x) = (x-2)$ או $m_A(x) = (x-2)^2$.

נבדוק איזה מהם, על ידי הצבה: הצבת A ב $x-2$ נותנת

$$A - 2I = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}-2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq O$$

לכן, $m_A(x) \neq x-2$, ולכן, בהכרח, $\boxed{m_A(x) = (x-2)^2}$ - האפשרות היחידה שנותרה.

2. $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$p_B(x) = |xI - B| = \begin{vmatrix} x - \frac{5}{2} & x - \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & x - \frac{5}{2} \end{vmatrix} = (x - \tfrac{5}{2})^2 - (x - \tfrac{1}{2})^2 =$$

$$= (x-3)(x-2).$$

כיון שכל גורם אי-פריק של $p_B(x)$ מופיע ב $m_B(x)$ (לפחות פעם אחת), $\boxed{m_B(x) = (x-3)(x-2)}$.

3. $C := \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$. כיון ש C אלכסונית-בלוקים,

$$p_C(x) = p_A(x) \cdot p_B(x) = (x-2)^2 \cdot (x-2)(x-3)$$
$$= (x-2)^3 \cdot (x-3).$$

$$\boxed{m_C(x) = lcm\left((x-2)^2,\ (x-2)\cdot(x-3)\right) = (x-2)^2 \cdot (x-3)}$$

(הפולינום הקטן ביותר שגם $(x-2)^2$ וגם $(x-2)(x-3)$ מחלקים.)

4. מרשימה לחישוב הפולינום האופייני והמינימלי של מטריצה אלכסונית-בלוקים, נוכל לייצר מטריצות עם פולינומים אופייני ומינימלי כרצוננו (פרט למגבלה שחייבים להיות להם אותם גורמים אי-פריקים).

למשל: מטריצה שהפ"א שלה הוא $(x-\sqrt{2})^3(x-\pi)^2$

א. והפ"מ " : $(x-\sqrt{2})^3(x-\pi)^2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi \end{array}\right).$$

אכן, אם נסמן את המט' הריבועיות המופיעות באלכסון כ- A,B אז

$$m(x) = lcm(m_A(x), m_B(x)) = lcm(\underbrace{(x-\sqrt{2})^3, (x-\pi)^2}_{\text{פ"מ של בלוק ז'ורדן}}) =$$

$$= (x-\sqrt{2})^3(x-\pi)^2.$$

ב. פ"א כנ"ל, פ"מ $(x-\sqrt{2})(x-\pi)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \sqrt{2} & 0 & 0 & & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & & \\ \hline & 0 & & \pi & 0 \\ & & & 0 & \pi \end{array}\right)$$

$$m(x) = lcm((x-\sqrt{2}), (x-\pi)) = (x-\sqrt{2})(x-\pi).$$

פ"מ של מט' אלכסונית

ג. פ"א כנ"ל, פ"מ $(x-\sqrt{2})^2(x-\pi)$:

(ארבע מט'-"בלוקים"-באלכסון, שלוש מהן מט' 1x1.)

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} \sqrt{2} & 1 & & & \\ 0 & \sqrt{2} & & & 0 \\ \hline & & \boxed{\sqrt{2}} & & \\ & 0 & & \boxed{\pi} & \\ & & & & \boxed{\pi} \end{array}\right)$$

$$m(x) = lcm(\underbrace{(x-\sqrt{2})^2}_{\text{בלוק ז'ורדן}}, x-\sqrt{2}, x-\pi, x-\pi) = (x-\sqrt{2})^2(x-\pi)$$

ד. בחן את עצמך: מצא מט' עם פ"א כנ"ל, ופ"מ $(x-\sqrt{2})(x-\pi)^2$.