

תקציר הרצאות באלגברה לינארית 2 למדמ"ח (פרט לדטרמיננטות והעתקות לינאריות)

בועז צבאן

21 במאי 2012

תקציר זה כולל, עבור חלק מהטענות (בדרך כלל, אלה שאינן מיידיות מההגדרות), את רעיון ההוכחה המרכזי (בצבע כחול), בשורה נפרדת. את פרטי ההוכחות, אם צריך, תמצאו בסיכומי ההרצאות.

מוסכמות: ערכים שאינם כתובים במטריצות, הם אפס ואינם מצויינים כדי שיהיה קל יותר לזכור. טענות שכתובות בלי כמתים, הכוונה שהן נכונות לכל אובייקט שמופיע בטענה, כאשר אובייקטים כמו v, u, w (עם או בלי אינדקסים) מציינים תמיד וקטורים במרחב רלוונטי, ואובייקטים כמו α, β, γ (עם או בלי אינדקסים) מציינים תמיד סקלרים בשדה רלוונטי. בהצגות אופרטורים לינאריים, אם לא יצויין אחרת, תמיד הכוונה לשימוש באותו בסיס בתחום ובטווח.

1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

1. **ערך עצמי** של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$: סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ כך שיש $v \in \mathbb{F}^n$ $0 \neq v$ שעבורו $Av = \lambda v$.
 v כזה נקרא **וקטור עצמי** של A (המתאים לערך עצמי λ).
2. ערך עצמי יכול להיות 0 ($\iff$ המטריצה אינה הפיכה).
3. מציאת הערכים העצמיים: λ ערך עצמי $\iff |\lambda I - A| = 0$.
4. הערכים העצמיים של מטריצה משולשית הם אברי האלכסון שלה.
5. דוגמא שאין ערכים עצמיים: מעל $\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($|\lambda I - A| = \lambda^2 + 1 \neq 0$).
6. מציאת הוקטורים העצמיים: אלה הפתרונות הלא טריויאליים של המערכת ההומוגנית $(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$ (או $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$).
7. תרגום המושגים והמשפטים לאופרטורים לינאריים $T: V \rightarrow V$:
(א) הגדרת ערך עצמי ווקטור עצמי של אופרטור לינארי. $(Tv = \lambda v, \vec{0} \neq v \in V)$
(ב) λ, v וקטור עצמי וערך עצמי מתאימים של $T \iff [v] \in \lambda, [T]$.
8. באתר הקורס: שיטות למציאת שורשי פולינומים.

2 ליכסון (בסיסי)

1. מטריצות ריבועיות A, B **דומות**: יש מטריצה הפיכה P כך ש $B = P^{-1}AP$.
2. למטריצות דומות אותה דטרמיננטה.
3. $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ **לכסינה** אם A דומה למטריצה אלכסונית (יש $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה כך שהמטריצה $P^{-1}AP$ אלכסונית).
4. יישום: חישוב חזקה גבוהה של מטריצה לכסינה.
אם $D = P^{-1}AP$ אלכסונית, אז $A = PDP^{-1}$ ואז $A^k = PD^kP^{-1}$.

5. קריטריון בסיסי לליכסון מטריצה: מטריצה ריבועית היא לכסינה $\iff$ יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים שלה.

אברי בסיס זה הם עמודות המטריצה המלכסנת.

$$(\Leftarrow) \text{ אם } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ אז } P^{-1}APe_i = \lambda_i e_i, P^{-1}APe_i = \lambda_i Pe_i, \text{ והעמודות } Pe_i \text{ של } P \text{ הן בסיס.}$$

($\Rightarrow$) אם הבסיס $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ מורכב מוקטורים עצמיים של A , ניקח $P = (v_1, \dots, v_n)$ (עמודות המטריצה). נחשב את $P^{-1}AP$ לפי כפל עמודה-עמודה (ונשים לב ש $P^{-1}v_i = e_i$).

6. הערכים העצמיים מופיעים באלכסון המטריצה האלכסונית המתקבלת, לפי סדר הוקטורים העצמיים.

7. המרחב העצמי $V_\lambda = V_\lambda(A) := \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}$. זה (תת-)מרחב.

$$8. \text{ בלוק ג'ורדן } J_\lambda(n) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}, 2 \leq n, \text{ אינו לכסין.}$$

9. תרגום לאופרטורים לינאריים $T: V \rightarrow V$:

(א) T לכסין אם יש בסיס B כך שהמטריצה $[T]_B$ אלכסונית.

(ב) אברי B כנ"ל הם וקטורים עצמיים של T , ולכן: T לכסין $\iff$ יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים שלו.

(ג) המרחב העצמי $V_\lambda = V_\lambda(T) := \{v \in V : Tv = \lambda v\}$.

3 הפולינום האופייני

1. הפולינום האופייני $p_A(x) := |xI - A|$.

2. הערכים העצמיים של A הם שורשי $p_A(x)$.

3. הפולינום האופייני של מטריצה משולשית (בפרט אלכסונית או סקלרית) הוא $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

4. פולינום מתוקן $f(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$.

5. תיקון פולינום שאינו 0: כפל בהופכי של המקדם המוביל.

6. הפולינום האופייני של $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$:

(א) מתוקן ומעלתו n .

(ב) אם $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ אז $a_0 = (-1)^n |A|$ ו $a_{n-1} = -\text{tr}(A)$.

בחישוב הדטרמיננטה $|xI - A|$ כסכום של מכפלות, רק תמורת הזהות משפיעה על מקדמי x^n, x^{n-1} .

$$a_0 = p_A(0) = |-A|$$

7. למטריצות דומות אותו פולינום אופייני (ובפרט אותם ערכים עצמיים).

8. בתרגיל: פולינום אופייני של אופרטור לינארי מוגדר היטב, ושווה לפולינום האופייני של כל הצגה שלו.

4 ריבוי גאומטרי ואלגברי

1. חלוקה של פולינומים עם שארית: לכל $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ ממעלה 1 או יותר, ולכל $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ ממעלה $1 \leq$, יש $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך ש:

$$(א) f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

(ב) המעלה של $r(x)$ קטנה מזו של $g(x)$.

(ללא הוכחה).

2. אם α שורש של פולינום $f(x)$, אז $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ לאיזשהו פולינום $g(x)$.

$f(x) = (x - \alpha)g(x) + r(x)$ ו $r(x)$ קבוע. מציבים את α .

3. פולינום מחלק פולינום: $f(x)|g(x)$ אם יש פולינום $h(x)$ כך ש $g(x) = h(x)f(x)$.

4. הראינו: אם $g(\alpha) = 0$, אז $(x - \alpha)|g(x)$.

5. ריבוי אלגברי של ערך עצמי λ : ה k המקסימלי כך ש $(x - \lambda)^k | p_A(x)$.

6. ריבוי גאומטרי של ערך עצמי λ : $\dim V_\lambda$.

7. $1 \leq \dim V_\lambda \leq n$ הריבוי האלגברי.

משלימים את הבסיס של V_λ לבסיס של V ושמים בעמודות מטריצה P . מכפל עמודה-עמודה, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda I & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = p_{P^{-1}AP}(x)$$

8. בתרגיל: דוגמאות קצה במטריצות $n \times n$:

(א) מטריצה סקלרית λI : ריבוי אלגברי וגם גאומטרי n .

(ב) בבלוק ג'ורדן: ריבוי אלגברי n , ריבוי גאומטרי 1.

5 קריטריון מפורט לליכסון ושילוש מטריצה

1. אם A לכסינה, אז $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.

למטריצות דומות אותו פולינום אופייני.

2. וקטורים עצמיים של ערכים עצמיים שונים הם בת"ל.

ניקח i מינימלי כך ש $v_1, \dots, v_i$ תלויים לינארית.

ניקח צירוף לא טריויאלי שלהם שמתאפס, נכפול ב A לקבל עוד אחד, ומשניהם עוד אחד, קצר יותר, סתירה.

3. מסקנה: אם למטריצה יש n ערכים עצמיים שונים, אז היא לכסינה.

(אך יש מטריצות לכסינות עם ערך עצמי יחיד, למשל λI).

4. קריטריון מפורט לליכסון כאשר $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים:

A לכסינה $\iff$ הריבוי הגאומטרי של כל ערך עצמי שווה לריבוי האלגברי שלו.

סכום הריבויים האלגבריים הוא n .

($\Leftarrow$) n הוקטורים העצמיים הבת"ל מתחלקים בין הערכים העצמיים השונים, ולכן סכום הריבויים הגאומטריים $n \leq n$. אם

יהיה ערך עצמי עם ריבוי גאומטרי קטן מהאלגברי, סכום הריבויים הגאומטריים יהיה קטן מ n .

($\Rightarrow$) נקבל שסכום הריבויים הגאומטריים הוא n , ווקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים הם בת"ל, לכן יש n וקטורים

עצמיים בת"ל.

5. כל מטריצה משולשית עליונה דומה למטריצה משולשית תחתונה (ולכן גם להיפך).

$$P = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \text{ ניקח}$$

6. משפט השילוש. $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ דומה למטריצה משולשית עליונה $\iff p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.

נשלים וקטור עצמי v לבסיס ונשים בעמודות P . אז $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$

$p_A(x) = (x - \lambda)p_B(x)$ ולכן גם $p_B(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

באינדוקציה על גודל המטריצה, יש Q שמשלשת את B , ואז $P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ תשלש את A .

6 משפט קיילי-המילטון והפולינום המינימלי

1. הצבת מטריצה בפולינום: עבור $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ו $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$,

$$f(A) := a_0I + a_1A + \dots + a_kA^k$$

2. משפט קיילי-המילטון. $p_A(A) = O$.

$$(xI - A) \operatorname{adj}(xI - A) = p_A(x)I = (x^n + \dots + \alpha_0)I$$

$$\operatorname{adj}(xI - A) = B_0 + xB_1 + \dots + x^{n-1}B_{n-1}$$

מציבים ומשוים אגפים.

3. לכל פולינום $f(x)$ כך ש $f(A) = O$, מתקיים $p_A(x) \mid (f(x))^n$.

כמו בהוכחת קיילי-המילטון, מחשבים בשיטת מצליח מטריצות $B_0, \dots, B_{k-1} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך שהמטריצה

$$B(x) = B_0 + xB_1 + x^2B_2 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}B_{k-1}$$

תקיים $(xI - A)B(x) = m_A(x)I$. מפעילים דטרמיננטה על שני האגפים.

4. באתר הקורס: הפולינום האופייני של המטריצה המלווה (companion matrix).

5. הפולינום המינימלי $m_A(x)$: הפולינום המתוקן מדרגה מינימלית שמאפס את A .

6. הפולינום המינימלי יחיד.

הפרש בין שני פולינומים מינימליים הוא ממעלה קטנה יותר ואם אינו אפס, אפשר לתקנו, סתירה.

7. דרגתו $n \geq$.

ממשפט קיילי-המילטון.

8. $m_A(x) \mid p_A(x)$ ולמעשה כל פולינום $f(x)$ כך ש $f(A) = O$.

$$f(x) = m_A(x)q(x) + r(x). \text{ נציב את } A.$$

9. מסקנה: לפולינום האופייני והמינימלי אותם גורמים אי פריקים.

בפרט, כל ערך עצמי הוא שורש של $m_A(x)$.

10. הפולינום המינימלי של $\lambda I \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הוא $x - \lambda$.

11. הפולינום המינימלי של בלוק ג'ורדן $J_n(\lambda)$ הוא $(x - \lambda)^n$.

12. מטריצה אלכסונית-בלוקים: מטריצה מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & A_k \end{pmatrix}$$

כאשר $A_1, A_2, \dots, A_k$ מטריצות ריבועיות מעל אותו שדה (לא דווקא מאותו סדר).

13. הפולינום האופייני והמינימלי של מטריצה אלכסונית-בלוקים: עבור A כנ"ל,

$$p_A(x) = p_{A_1}(x) \cdot p_{A_2}(x) \cdot \dots \cdot p_{A_k}(x)$$

$$m_A(x) = \operatorname{lcm}(m_{A_1}(x), m_{A_2}(x), \dots, m_{A_k}(x))$$

כאשר lcm של פולינומים הוא הכפולה המשותפת הקטנה ביותר שלהם, כלומר הפולינום המתוקן הכי קטן שמתחלק בכולם בלי שארית.

באתר הקורס: דוגמאות.

14. בתרגיל: למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי.

7 צורת ג'ורדן של מטריצה (סקירה בלי הוכחות)

1. תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים. אזי A דומה למטריצה אלכסונית-בלוקים שכל בלוקיה הם בלוקי ג'ורדן $J_m(\lambda)$:

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ אינם בהכרח שונים).

2. צורת ג'ורדן של מטריצה היא יחידה, עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

3. הריבוי הגאומטרי של כל ערך עצמי λ הוא מספר הבלוקים עם ערך עצמי λ בצורת ג'ורדן של A .

4. מעלת כל גורם $x - \lambda$ ב $m_A(x)$ שווה לגודל הבלוק הגדול ביותר עם ערך עצמי λ בצורת ג'ורדן של A .

5. כאשר $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים: A לכסינה $\iff$ לכל ערך עצמי λ , מעלת $x - \lambda$ בפולינום המינימלי היא 1.

6. מטריצות שהפולינום האופייני שלהן מתפרק לגורמים לינאריים הן דומות אם ורק אם יש להן אותה צורת ג'ורדן (עד כדי סדר הבלוקים).

7. באתר הקורס: דוגמאות.

8 מכפלה פנימית

1. מכפלה פנימית על מרחב וקטורי מעל הממשיים או המרוכבים:

(א) לינאריות ברכיב הראשון: $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$. (כלומר, $u \mapsto \langle u, v \rangle$ העתקה לינארית).

(ב) הרמיטיות: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$. (מעל $\mathbb{R}$, זו סימטריות $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$).

(ג) אי-שליליות: $\langle v, v \rangle \geq 0$ (ממשי) ושיוון $\iff v = \vec{0}$.

2. המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{F}^n$ (וקטורי עמודה): $\langle u, v \rangle := u^t \bar{v}$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \dots + \alpha_n \bar{\beta}_n$$

במפורש:

3. כמולינאריות (ומעל $\mathbb{R}$ לינאריות ממש) ברכיב השני: $\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \rangle = \bar{\beta}_1 \langle u, v_1 \rangle + \bar{\beta}_2 \langle u, v_2 \rangle$.

4. מטריצת גראם

$$G_{\{v_1, \dots, v_k\}} := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \dots & \langle v_k, v_k \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times k}$$

5. עבור B בסיס: $\langle u, v \rangle = [u]_B^t G_B \overline{[v]_B}$.

אם $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$, אז מלינאריות וכמולינאריות, $\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j \langle v_i, v_j \rangle$.

6. מסקנה: מטריצת גראם קובעת את המכפלה הפנימית; מכפלות פנימיות שמתלכדות על בסיס הן זהות.

7. לכל זוג בסיסים B, C מתקיים $G_B = ([I]_C^B)^t G_C \overline{[I]_C^B}$.

מחשבים את $e_i^t A e_j$ עבור כל אחת משתי המטריצות, ומראים שיוצא אותו דבר לכל i, j .

9 נורמה, בסיס אורתונורמלי

1. נורמה: פונקציה $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת:

(א) אי־שליליות: $\|v\| \geq 0$ ושיויון $v = \vec{0} \iff \|v\| = 0$

(ב) הומוגניות: $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(ג) אי־שיויון המשולש: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

2. נורמה מושרית ממכפלה פנימית: $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

3. הנורמה המושרית ממכפלה פנימית מקיימת אי־שליליות והומוגניות. (רק עליהם נסתמך עד שנוכיח את אי־שיויון המשולש).

4. וקטור נורמלי: וקטור v המקיים $\|v\| = 1$

5. נירמול וקטור: הכפלה בסקלר $\frac{1}{\|v\|}$ לקבלת הוקטור $\tilde{v} := \frac{1}{\|v\|} v$

6. אפשר לנרמל כל וקטור פרט ל $\vec{0}$, והוקטור המנורמל $\tilde{v}$ מקיים $\|\tilde{v}\| = 1$.

7. u, v מאונכים אם $\langle u, v \rangle = 0$. סימון: $u \perp v$

8. תכונות:

(א) $v_2 \perp v_1 \iff v_1 \perp v_2$

(ב) $\vec{0} \perp v$

(ג) $\alpha v_1 \perp \beta v_2 \iff v_1 \perp v_2$

9. קבוצה S היא אורתוגונלית אם כל שני איברים שונים שלה מאונכים.

10. $S \not\perp \vec{0}$ אורתוגונלית $S \Leftarrow$ בת"ל.

$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, v_i \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$, לכן אם הצירוף מתאפס המקדמים מתאפסים.

11. קבוצה אורתונורמלית: קבוצה אורתוגונלית שכל איבריה נורמלים.

12. קבוצה אורתונורמלית היא בת"ל.

13. $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אורתונורמלית $\iff \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ (לכל $1 \leq i, j \leq n$) $G_B = I$

14. בסיס אורתוגונלי: בסיס שהוא קבוצה אורתוגונלית.

15. בסיס אורתונורמלי: בסיס שהוא קבוצה אורתונורמלית.

16. ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית, הבסיס הסטנדרטי $\{e_1, \dots, e_n\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.

17. עבור בסיס אורתונורמלי, המכפלה הפנימית שווה למכפלה פנימית הסטנדרטית של הצגות הוקטורים $\langle u, v \rangle = [u]_B^t \overline{[v]_B}$

$$G_B = I \vee \langle u, v \rangle = [u]_B^t G_B \overline{[v]_B}$$

18. הצגת וקטור לפי בסיס אורתונורמלי: אם $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ אז $\alpha_i = \langle v, v_i \rangle$

19. משפט פיתגורס: עבור בסיס אורתונורמלי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ווקטור $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$\|v\|^2 = [v]_B^t \overline{[v]_B} = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$$

10 בסיס אורתונורמלי והטלות

1. $A^* := \overline{A^t} = \overline{A}^t$.
2. מטריצה אוניטרית: $A^* = A^{-1}$.
3. A אוניטרית $\iff A^t \iff A^*$ אוניטרית.
4. מטריצה אוניטרית $\iff$ שורותיה בא"נ במ"פ הסטנדרטית $\iff$ עמודותיה בא"נ במ"פ הסטנדרטית.
5. מטריצת מעבר בין בא"נ היא אוניטרית.
6. המרחב הניצב לקבוצה: $S^\perp = \{v \in V : \forall u \in S, \langle v, u \rangle = 0\}$. זה (תת-)מרחב.
7. $S^\perp = \text{span}(S)^\perp$.
8. היטל של וקטור לתת-מרחב W עם בסיס אורתוגונלי $B = \{w_1, \dots, w_k\}$:

$$\pi_B(v) := \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \dots + \frac{\langle v, w_k \rangle}{\|w_k\|^2} w_k$$

אם נכפול את וקטורי הבסיס האורתוגונלי בסקלרים שונים מאפס, התוצאה לא תשתנה.
אם הבסיס אורתונורמלי, אז $\pi_B(v) := \langle v, w_1 \rangle w_1 + \dots + \langle v, w_k \rangle w_k$
9. ההיטל שייך לתת-המרחב.
10. $v \in W \iff \pi_B(v) = v$.
11. $v - \pi_B(v) \in W^\perp$.
- $v - \pi_B(v) \in B^\perp = W^\perp$.

11 המרחב הניצב ותהליך גראם-שמידט

1. תהליך גראם-שמידט (בלי נירמול): יהיו $v_1, \dots, v_n$ בסיס.
 - (א) $\hat{v}_1 := v_1$
 - (ב) עבור $k > 1$: $\hat{v}_k := v_k - \pi_{\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{k-1}\}}(v_k)$

אופציונלי: כפל $\hat{v}_k$ בסקלר $\neq 0$.
2. לכל k , $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$ בסיס אורתוגונלי של $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$. בפרט, בסוף מתקבל בסיס אורתוגונלי של המרחב כולו.
לקבלת בסיס אורתונורמלי, אפשר לנרמל בסוף.
הכפל בסקלר לא משנה את ההטלות ולכן לא משנה את התהליך.
 $v_k = \hat{v}_k + \pi_{\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{k-1}\}}(v_k) \in \text{span}\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$ ולכן $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \text{span}\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$ ולכן שווים.
3. כל קבוצה אורתונורמלית אפשר להשלים לבסיס אורתונורמלי.
משלימים לבסיס ומפעילים גראם-שמידט. הקבוצה האורתונורמלית אינה משתנה בתהליך.
4. אי-שוויון בסל: עבור $v_1, \dots, v_k$ אורתונורמלים, $\|v\|^2 \geq |\langle v, v_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_k \rangle|^2$, ושיוון $\iff v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$.
השלמה לבסיס אורתונורמלי ומשפט פיתגורס.
אם מתקיים שיוון, אז $|\langle v, v_{k+1} \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_n \rangle|^2 = 0$.
5. אי-שוויון קושי-שוורץ: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ ושיוון $\iff$ הם תלויים לינארית.
 $\frac{u}{\|u\|}$ אורתונורמלי; אי-שוויון בסל.

12 שימושים של גראם-שמידט ומשפט הפירוק הניצב

1. "הנורמה המושרית" מקיימת את אי-שוויון המשולש (ולכן היא נורמה).
 $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2$; הפעלת ערך מוחלט, אי-שוויון המשולש למספרים ממשיים, ואי-שוויון קושי-שוורץ.
2. מטריצת המעבר מתוצר תהליך גראם-שמידט לבסיס המקורי היא משולשית עליונה.
 (ולכן גם מטריצת המעבר בכוון ההפוך).
3. **משפט הפירוק הניצב**: לכל תת-מרחב U של V מתקיים $U \oplus U^\perp = V$.
 הוקטורים שמסלימים בסיס אורתונורמלי של U לבסיס אורתונורמלי של V הם בסיס של $U^\perp$.
4. $U^{\perp\perp} = U$.
 $U \subseteq U^{\perp\perp}$ ומימדם שווה.
5. ההטלה לתת-מרחב אינה תלויה בבחירת בסיס האורתונורמלי.
 מיחידות ההצגה במשפט הפירוק הניצב: $\pi_B(v) + (v - \pi_B(v)) = v = \pi_C(v) + (v - \pi_C(v))$.
6. אם $u \perp v$, אז $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
 חישוב ישיר.
7. ההיטל של v על W הוא הוקטור ב W הקרוב ביותר ל v .
 $\|v - w\|^2 = \|v - \pi(v)\|^2 + \|w - \pi(v)\|^2$ לכן $v - \pi(v) \perp w - \pi(v)$.

* * * מכאן ואילך לא נכסה השנה (תשע"ב) * * *

13 ההעתקה הצמודה

1. **פונקציונל לינארי**: העתקה לינארית $\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}$.
2. **משפט ההצגה של ריס**: לכל פונקציונל לינארי φ יש וקטור יחיד u כך ש $\varphi(v) = \langle v, u \rangle$.
 יחידות: אם $\langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle$ אז $\langle v, u_1 - u_2 \rangle = 0$ ובפרט $\langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0$.
 קיום: לפי בסיסים אורתונורמלים, $\varphi(v) = [\varphi(v)]_{\{1\}} = [\varphi]_{\{1\}}^B [v]_B = [v]_B^t \vec{b}$, ניקח u כך ש $\overline{[u]_B} = \vec{b}$.
3. **ההעתקה הצמודה**: תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית בין מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה. $T^*: W \rightarrow V$ היא ההעתקה היחידה המקיימת $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$ (כוכב נולד) לכל $v \in V, w \in W$.
 T^* קיימת במשפט ריס.
4. T^* לינארית.
 $\langle v, T^*(\alpha w_1 + \beta w_2) \rangle = \langle v, \alpha T^* w_1 + \beta T^* w_2 \rangle$ ממשוואת כוכב נולד.
5. עבור בסיסים אורתונורמלים, $[T^*]_E^F = ([T]_F^E)^*$.
 חישוב $e_i^t A e_j = [v_i]_E^t A [w_j]_F$ כאשר $E = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, F = \{w_1, \dots, w_m\}$.
6. מסקנה: $(T + S)^* = T^* + S^*, (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*, T^{**} = T, (ST)^* = T^* S^*$.
 מציגים לפי בסיסים אורתונורמלים.

14 תכונות וסוגים מיוחדים של אופרטורים

1. אופרטור $T: V \rightarrow V$ נקרא:

(א) **נורמלי** אם $TT^* = T^*T$.

(ב) **אוניטרי** אם $T^* = T^{-1}$.

(ג) **צמוד לעצמו** אם $T^* = T$.

2. בדומה, מגדירים מטריצה (ריבועית) נורמלית/אוניטרית/צמודה לעצמה.

3. אופרטור T נורמלי/אוניטרי/צמוד לעצמו $\iff$ הצגתו $A := [T]_B$ לפי בסיס אורתונורמלי היא נורמלית/אוניטרית/צמודה לעצמה.

מטריצה A היא נורמלית/אוניטרית/צמודה לעצמה $\iff$ האופרטור $L_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ של כפל ב A משמאל הוא נורמלי/אוניטרי/צמוד לעצמו.

$$4. \operatorname{Re} \langle u, v \rangle = \frac{1}{2} \left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right) \quad \text{חישוב } \|u+v\|^2.$$

$$5. \text{הזהות הפולרית מעל } \mathbb{R}: \langle u, v \rangle = \frac{1}{2} \left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right).$$

$$6. \operatorname{Im} \langle u, v \rangle = \operatorname{Re} \langle u, iv \rangle = \frac{1}{2} \left(\|u+iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right).$$

$$7. \text{הזהות הפולרית מעל } \mathbb{C}: \langle u, v \rangle = \frac{1}{2} \left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right) + \frac{i}{2} \left(\|u+iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right).$$

8. מסקנה: הנורמה המושרית קובעת את המכפלה הפנימית.

$$9. T \text{ נורמלי} \iff \|Tv\| = \|T^*v\|.$$

מהזהות הפולרית.

10. התכונות הבאות שקולות עבור אופרטור:

(א) אוניטרי.

(ב) שומר מכפלה פנימית: $\langle v, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle$.

(ג) שומר נורמה: $\|Tv\| = \|v\|$.

(ד) שומר מרחקים: $\|T(v-u)\| = \|v-u\|$.

הגרירה האחרונה מהזהות הפולרית. $a \Leftarrow c \Leftarrow d \Leftarrow c \Leftarrow b \Leftarrow a$

$$11. \text{זווית במרחב מכפלה פנימית מעל } \mathbb{R}: \text{הסקלר היחיד } 0 \leq \theta < \pi \text{ שמקיים } \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \cos \theta.$$

12. אם T נורמלי, אז T, T^* משפיעים באותו אופן על זווית.

13. אופרטור אוניטרי שומר גם זווית: $\angle(u, v) = \angle(Tu, Tv)$.

הכיוון ההפוך לא נכון: $T(v) = 5v$ על $\mathbb{R}^2$.

$$14. \text{הצגת אופרטות הסיבוב בזווית } \alpha, R_\alpha, \text{ על } \mathbb{R}^2, \text{ לפי הבסיס הסטנדרטי: } [R_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

על סמך פעולותיו על e_1, e_2 .

15. שימוש: כיון ש $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$, נקבל הוכחה לנוסחאות של $\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta)$.

15 שילוש אוניטרי

1. מחישוב ישיר (או תרגום מאופרטורים), לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, המכפלה הפנימית **הסטנדרטית** על $\mathbb{F}^n$ מקיימת:

$$(א) \quad \langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$$

$$(ב) \quad \text{אם } A \text{ נורמלית, אז } \|Av\| = \|A^*v\|$$

$$(ג) \quad \text{אם } A \text{ אונטרית, אז } \|Av\| = \|v\|$$

2. עבור אופרטור/מטריצה נורמלית, אם $Av = \lambda v$, אז $A^*v = \bar{\lambda}v$.

$$\text{גם } \lambda I - A \text{ נורמלית, לכן } \|(\lambda I - A)v\| = \|(\lambda I - A)^*v\| = \|(\bar{\lambda}I - A^*)v\|$$

$$.0 = \|(\lambda I - A)v\| = \|(\lambda I - A)^*v\| = \|(\bar{\lambda}I - A^*)v\|$$

3. מסקנות:

(א) וקטורים עצמיים השייכים לע"ע שונים הם מאונכים.

מחשבים $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$ לוקטורים העצמיים.

(א) כל הערכים העצמיים של אופרטור צמוד לעצמו הם ממשיים.

$$\lambda v = Av = A^*v = \bar{\lambda}v$$

4. מעל $\mathbb{R}$: אם $p_T(x)$ אינו מתפרק לגורמים לינאריים, אז T אינו ניתן לשילוש (ובפרט אינו לכסין). בדומה עבור מטריצות.

5. **משפט השילוש האוניטרי עבור אופרטורים:** אם $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, אז יש בסיס אורתונורמלי כך ש $[T]_B$ משולשית.

הוכחה: משפט השילוש ותהליך גראם-שמידט על הבסיס.

6. גם הכוון ההפוך נכון: T ניתן לשילוש אוניטרי $\iff p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

7. **משפט השילוש האוניטרי עבור מטריצות:** אם $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, אז יש P אוניטרית כך שהמטריצה $P^*AP = P^{-1}AP$ משולשית.

תרגום מאופרטורים.

8. מציאת P במפורש: הפעלת תהליך גראם-שמידט על P של משפט השילוש הרגיל.

9. מעל $\mathbb{C}$: כל אופרטור/מטריצה ריבועית ניתן לשילוש אוניטרי.

16 ליכסון אוניטרי ואורתוגונלי

1. מטריצה משולשית ונורמלית היא אלכסונית.

$$\text{השוואת אברי האלכסון של המטריצות } AA^* = A^*A$$

2. **משפט הליכסון האוניטרי עבור אופרטורים:** כל אופרטור נורמלי עם $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, הוא לכסין אוניטרי. ממשפט השילוש האוניטרי, נקבל מטריצה משולשית ונורמלית, לכן אלכסונית.

3. נורמליות היא גם תנאי הכרחי: כל אופרטור לכסין אוניטרי הוא נורמלי, והפולינום האופייני שלו מתפרק לגורמים לינאריים.

4. **משפט הליכסון האוניטרי עבור מטריצות:** כל מטריצה נורמלית עם פולינום אופייני מתפרק לגורמים לינאריים היא לכסינה אוניטרית, ולהיפך.

תרגום מאופרטורים.

5. במפורש: גראם-שמידט על בסיס המורכב מוקטורים עצמיים (יש כזה כי המטריצה לכסינה). אפשר לבצע גראם-שמידט על בסיס כל מרחב עצמי בנפרד.

6. מעל $\mathbb{C}$:

(א) אופרטור הוא נורמלי $\iff$ לכסין אוניטרי.

(ב) מטריצה היא נורמלית $\iff$ לכסינה אוניטרית.

מעל $\mathbb{C}$, הפולינום האופייני מתפרק תמיד לגורמים לינאריים.

7. נתמקד כעת במקרה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

8. אופרטור/מטריצה אוניטרי/ת מעל $\mathbb{R}$ נקרא **אורתוגונלי/ת**.

9. **משפט הליכסון האורתוגונלי עבור מטריצות:** לכל $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית, יש $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אורתוגונלית כך שהמטריצה $P^t A P = P^{-1} A P$ אלכסונית. סימטריות היא גם תנאי הכרחי.

$p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$ והערכים העצמיים ממשיים, לכן מתפרק גם מעל $\mathbb{R}$. נפעיל את משפט הליכסון האוניטרי.

10. **משפט הליכסון האורתוגונלי עבור אופרטורים:** כל אופרטור צמוד-לעצמו הוא לכסין אורתוגונלית. "צמוד-לעצמו" הוא גם תנאי הכרחי.

תרגום ממטריצות.

11. (כמו קודם) במפורש: גראם-שמידט על בסיס המורכב מוקטורים עצמיים, לכל מרחב עצמי בנפרד.

12. מסקנה: מעל $\mathbb{R}$, אם הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, אז נורמלי וצמוד לעצמו (=סימטרי) זה אותו דבר.

13. דוגמא נגדית כאשר הפולינום האופייני אינו מתפרק לגורמים לינאריים: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ מקיימת $A^t = -A$ (אנטי-סימטרית) ולכן נורמלית ולא סימטרית.