

שאלה 1

יהי F שדה. נגדיר אופרטור לינארי $T: F^4 \rightarrow F^4$ על ידי $T(x, y, z, w) = (y, x, -w, z)$.

א. עבור המקרה ש $F = C$, מצא בסיס B כך ש $[T]_B$ מטריצה אלכסונית.

ב. עבור המקרה ש $F = R$, הוכח שאין בסיס B כך ש $[T]_B$ מטריצה אלכסונית.

תשובה: נמצא מטריצה שה"צ אף T :

$$A = [T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = (x^2 - (-1))(x^2 - (-1)) = (x^2 - (-1))(x^2 - (-1))$$

כאשר נשט
~~המטריצה~~

~~המטריצה~~

פוטנציאל אופייני של מטריצה אלכסונית גזוקים שווה
למכנה ופוטנציאלים של המטריצה.

$$P_A(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

מאחר

הפוטנציאלים הם פריקם ליניאריים ופוטנציאל המטריצה הם פוטנציאלים
מאחר למטריצה אחת מ"צא המטריצה ליניאריהם פוטנציאלים גזוקים
אין מסתב R מטריצה אלכסונית שה"צ אף המטריצה T
✓ ל.ע.נ

$$P_A(x) = (x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$$

גזוקים המטריצה $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$

מאחר שיש אף A פוטנציאלים A פוטנציאלים
והם במטריצה אלכסונית הם אף A פוטנציאלים

מוס

T במטריצה B כ"פ
במטריצה פוטנציאלים
ככ"פ (מטריצה B) מ"צא
אף אף המטריצה פוטנציאלים
פוטנציאלים.

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

סדרה
 $B \rightarrow B$ (כלי נשט)
א"פ T פוטנציאלים
אף סדרה פוטנציאלים.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

the eigenvalues
look

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 \cdot (-\frac{1}{2i})} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 + \alpha_4 \cdot i = 0$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

$$q = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1 \cdot i, S_3 \cdot i} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\lambda = i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 - i\alpha_4 = 0$$

$$\alpha_3 = i\alpha_4$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = [I] A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח שהמטריצה A היא לכסינה אם ורק אם יש בסיס של $\mathbb{F}^n$ המורכב מוקטורים עצמיים שלה.

תשובה:

($\Leftarrow$) A לכסינה. לכן D אלכסיאלית כך $P^{-1}AP = D$.

ניביל גזר שמא P ונקבל $AP = PD$

משום D היא מטריצה אלכסיאלית אז היא מוסיפה גזר $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

וכאשר מכפילים מטריצה כזו במטריצה P מקבלים $PD = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n)$

כאשר $v_1, \dots, v_n$ הם עמודות P , $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n$ הם עמודות PD

ולכן נקבל שעמודות P הם ו'ע' של A משום שהן "ישויות" בגזר.

$$AP = PD \Rightarrow (Av_1, \dots, Av_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n)$$

ולכן עמודות P הם λ_i ו'ע' של A , ומשום P הפכה הם בת'ם
ולכן הם בסיס של $\mathbb{F}^n$ (משום שהם "ישויות" וקאליס) $\square$

($\Rightarrow$) קיים בסיס של $\mathbb{F}^n$ המורכב מ'ע' של A . נגדיר בסיס זה $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

נקח מטריצה הפכה P באמצעות וקאליס אלו כך שכל וקאליס הוא עמודה

ב- P . $P = (v_1, \dots, v_n)$ (הפכה כי עמודותיה הם בסיס, לכן ג'ל)
נשתמש את המ' $P^{-1}AP$ (נשקי $\mathbb{F}^n$, ה'ע' והמתאמת צ'ס'ם B)

$$P^{-1}AP = P^{-1}(Av_1, \dots, Av_n) \underset{\substack{\text{עמודות } P \text{ הם ו'ע} \\ A \text{ על } B}}{=} P^{-1}(\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = (P^{-1}(\lambda_1 v_1), \dots, P^{-1}(\lambda_n v_n)) \underset{T(v) = \lambda T(v)}{=}$$

$$= (\lambda_1 P^{-1}(v_1), \dots, \lambda_n P^{-1}(v_n)) \underset{P^{-1}P = I = (e_1, \dots, e_n)}{=} (\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

ולכן D מטריצה שקומה ל- A והיא אלכסיאלית ולכן A לכסינה $\square$

שאלה 4

יהי V מרחב מכפלה פנימית. נגדיר $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ לכל $v \in V$. הוכח את אי-שוויון המשולש:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

לכל $u, v \in V$.

תשובה:

נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$

נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$

נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$

נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$
 נניח באיגרת השני $\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u+v\|^2$