

משפט ג'ורדן: דוגמאות בסיסיות

21 במאי 2012

1 דוגמאות עם ערך עצמי יחיד

1.1 מטריצות 3×3

דוגמה 1: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$p_A(x) = (x-2)((x-1)(x-3)+1) = (x-2)(x^2-4x+4) = (x-2)^3$ מתפרק לגורמים לינאריים, לכן אפשר לג'ורדן.

$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ (למעשה, מספיק לחשב את שני האיברים הראשונים של השורה הראשונה של $(A-2I)^2$) כדי לראות זאת). לכן, $m_A(x) = p_A(x) = (x-2)^3$.

לכן, יש בצורת ג'ורדן של A בלוק ג'ורדן $J_3(2)$ ולכן צורת ג'ורדן של A היא $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

דוגמה 2: נדגים בקצרה את שתי האפשרויות הנותרות עבור מטריצות 3×3 עם ערך עצמי יחיד:

א. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $p_A(x) = (x-2)^3$ ו $m_A(x) = (x-2)^2$. לכן, יש בצורת ג'ורדן של A בלוק ג'ורדן $J_2(2)$ וצורת ג'ורדן היא $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ב. במקרה הנותר, $m_A(x) = x-2$ ולכן הבלוק הגדול ביותר בצורת ג'ורדן של A הוא $J_1(2)$. לכן, צורת ג'ורדן של A היא $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

תרגיל: צורת ג'ורדן של מטריצה 3×3 נקבעת באופן יחיד על ידי הפולינום האופייני והפולינום המינימלי שלה.

1.1.1 מטריצות 4×4 עם ערך עצמי יחיד

$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 4 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 5 & -6 \\ 7 & -2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. $p_A(x) = (x-2)^4$, $m_A(x) = (x-2)^2$. לכן צורות ג'ורדן האפשריות הן $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

מבדיקה ישירה (פתרון המערכת ההומוגנית $(A-2I)\vec{x} = \vec{0}$), הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי 2 הוא 2, ולכן בצורת ג'ורדן יש בדיוק 2 בלוקים.

לכן, הצורת ג'ורדן של המטריצה שלנו היא $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

תרגיל: מצא את צורת ג'ורדן של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2 דוגמא עם יותר מערך עצמי אחד

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2 = p_A(x)$ ולכן צורת ג'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 דוגמא לסיום

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $p_A(x) = (x-1)(x+1)^3 = m_A(x)$ ולכן צורת ג'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$