

השלמה להרצאה הראשונה (אלגברה לינארית 2 למדמ"ח)

בועז צבאן

12 במרץ 2012

בהרצאה סיפקתי רק סקירה של הוכחת המשפטון הבא. אפרט כאן הוכחה מלאה.
משפטון (לינאריות הדטרמיננטה בכל שורה): דטרמיננטות של מטריצות ריבועיות מקיימות את הזהות

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{w} \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \mathbf{u} \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \mathbf{w} \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}$$

כאשר הוקטורים מציינים את שורות המטריצות.

הוכחה: עבור וקטור שורה v , נסמן ב $(v)_i$ את הרכיב ה i שלו. אז

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{w} \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (v_1)_{\sigma(1)} \cdot (v_2)_{\sigma(2)} \cdots (v_{i-1})_{\sigma(i-1)} (\alpha u + \beta w)_{\sigma(i)} (v_{i+1})_{\sigma(i+1)} \cdots (v_n)_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot (v_1)_{\sigma(1)} \cdot (v_2)_{\sigma(2)} \cdots (v_{i-1})_{\sigma(i-1)} (\alpha u)_{\sigma(i)} (v_{i+1})_{\sigma(i+1)} \cdots (v_n)_{\sigma(n)} + \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot (v_1)_{\sigma(1)} \cdot (v_2)_{\sigma(2)} \cdots (v_{i-1})_{\sigma(i-1)} (\beta w)_{\sigma(i)} (v_{i+1})_{\sigma(i+1)} \cdots (v_n)_{\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot (v_1)_{\sigma(1)} \cdot (v_2)_{\sigma(2)} \cdots (v_{i-1})_{\sigma(i-1)} \alpha (u)_{\sigma(i)} (v_{i+1})_{\sigma(i+1)} \cdots (v_n)_{\sigma(n)} + \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot (v_1)_{\sigma(1)} \cdot (v_2)_{\sigma(2)} \cdots (v_{i-1})_{\sigma(i-1)} \beta (w)_{\sigma(i)} (v_{i+1})_{\sigma(i+1)} \cdots (v_n)_{\sigma(n)} = \\ &= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot (v_1)_{\sigma(1)} \cdot (v_2)_{\sigma(2)} \cdots (v_{i-1})_{\sigma(i-1)} (u)_{\sigma(i)} (v_{i+1})_{\sigma(i+1)} \cdots (v_n)_{\sigma(n)} + \\ &\quad + \beta \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot (v_1)_{\sigma(1)} \cdot (v_2)_{\sigma(2)} \cdots (v_{i-1})_{\sigma(i-1)} (w)_{\sigma(i)} (v_{i+1})_{\sigma(i+1)} \cdots (v_n)_{\sigma(n)} = \\ &= \alpha \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \mathbf{u} \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \mathbf{w} \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

מה שרצינו להוכיח. $\square$