השלמה להרצאה השניה (אלגברה לינארית 2 למדמ"ח)

בועז צבאן

12 במרץ 2012

משפטון: לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $|A^t| = |A|$.

הוכחה: תהי $B = A^t$, כלומר $b_{ij} = a_{ji}$ לכל $1 \le i, j \le n$.

תהי $\sigma \in S_n$. כאשר i עובר על הערכים בקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$, גם $\sigma^{-1}(i)$ עובר עליהם, רק בסדר אחר (כי σ^{-1} היא תמורה). לכן, מקומוטטיביות הכפל בשדה,

$$b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = b_{\sigma^{-1}(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))} \cdots b_{\sigma^{-1}(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))} = b_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots b_{\sigma^{-1}(n),n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

נזכור גם ש $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

לכן, מהגדרת הדטרמיננטה כסכום של מכפלות:

$$\left|A^t\right| = |B| = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

הפונקציה $f\colon S_n \to S_n$ המוגדרת על ידי $f(\sigma) = \sigma^{-1}$ היא חד־חד ערכית ועל (כי $f \circ f(\sigma) = (\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$ לכל σ, כלומר $f \circ f = id$). לכן,

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma\in S_n, \tau:=\sigma^{-1}} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = |A|$$

מה שרצינו להוכיח. $\square$