

השלמה בנושא העתקות לינאריות (אלגברה לינארית 2 למדמ"ח)

בועז צבאן

23 באפריל 2012

נזכור את המשפט שהוכחנו על הצגה של הרכבת העתקות לינאריות: $[RT]_G^E = [R]_G^F \cdot [T]_F^E$, או בקצרה: $[RT] = [R] \cdot [T]$. נראה כאן כמה יישומים של משפט זה.

1 בונוס: הוכחת נוסחאות הסינוס והקוסינוס

זוכרים שבבית הספר היתה לכם נוסחה ל $\sin(\alpha \pm \beta)$ ול $\cos(\alpha \pm \beta)$? אם תחשבו טוב, תגלו שלימדו אתכם את הנוסחה מבלי להוכיחה. כן, מביך, מעולם לא ראיתם הוכחה לזה, והשתמשתם בזה המון. לא עוד! נראה כאן הוכחה ממש יפה לנוסחאות האלה, בעזרת אלגברה לינארית.

תהי $T_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ סיבוב בזווית α נגד כיוון השעון. זו העתקה לינארית (ציינו זאת בעבר, וקל לוודא). נחשב את ההצגה שלה לפי הבסיסים הסטנדרטיים.

$$T_\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}: \text{סיבוב של } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ בזווית } \alpha \text{ נגד כיוון השעון, ציירו וודאו:}$$

$$T_\alpha(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}: \text{סיבוב של } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ בזווית } \alpha \text{ נגד כיוון השעון, ציירו וודאו:}$$

$$[T_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ (לכל זווית } \alpha).$$

כעת, סיבוב (נגד כיוון השעון) בזווית $\alpha + \beta$ זהה להפעלת סיבוב (נגד כיוון השעון) בזווית β ואחריה סיבוב (נגד כיוון השעון) בזווית α , כלומר: $T_{\alpha+\beta} = T_\alpha T_\beta$. לכן, ההצגות לפי הבסיס הסטנדרטי מקיימות

$$[T_{\alpha+\beta}] = [T_\alpha T_\beta] = [T_\alpha] \cdot [T_\beta]$$

נציב את ההצגות ונקבל:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & * \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & * \end{pmatrix}$$

ומהשוואת רכיבי המטריצות בעמודה הראשונה, נקבל

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

את הנוסחאות עבור $\sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha - \beta)$ אפשר לקבל מנוסחות אלה, כיון ש $\cos(-\beta) = \cos \beta$ ו $\sin(-\beta) = -\sin \beta$.

2 השלמה בנושא מטריצות מעבר בין בסיסים

ראינו שעבור בסיסים E, F של אותו מרחב וקטורי V , ההצגה של העתקת הזהות $I: V \rightarrow V$ מקיימת $[I]_F^E[v]_E = [v]_F$. נוכיח כמה תכונות בסיסיות:

משפטון: $[I]_E^F = ([I]_F^E)^{-1}$. הוכחה: $[I]_E^F \cdot [I]_F^E = [I]_E^E = I$, השויון האחרון כיון שבמטריצה $[I]_E^E$ מציגים את העתקת הזהות לפי אותו בסיס בתחום ובטווח.

להוכחה שגם המכפלה בכיוון ההפוך $[I]_F^E \cdot [I]_E^F = I$ היא I יש שני יתרונות: ראשית, היא דומה להפליא, ושנית, היא מיותרת לגמרי (אנו יודעים מלינארית 1, שאם מטריצות ריבועיות מקיימות $AB = I$, אז $BA = I$ ולכן $B = A^{-1}$). ■