תשובות למבחנים באלגברה לינארית 1

סמסטר א' תשפ"ב מועד ב' / סמיון אלסקר

1) א) עבור $\lambda \neq 1,-2$ יש פתרון יחיד והוא $\begin{pmatrix}\frac{1}{a+2}\\ \frac{1}{a+2}\\ \frac{1}{a+2}\end{pmatrix}$

עבור $\lambda = 1$ יש אינסוף: $\begin{pmatrix}-s-t\\ s\\ t\end{pmatrix}$

עבור $\lambda = -2$ אין פתרונות.

ב) צריך להוכיח שאם $U \cup W$ תת"מ של V אז $U \cup W = W$ או $U \cup W = U$, ומכאן נובעת טענת התרגיל.

2) א) מחסרים את המשוואות ומקבלים $T(e_1)=0 \Rightarrow e_1 \in \ker T$

ד) מ-(א) מקבלים $T(e_3)=T(e_2)$ ולכן $T(e_2-e_3)=0$. כיוון ש e_1, e_2-e_3 בת"ל ובגרעין לגרעין לפחות מימד 2.

3) א) נעשה דירוג בלוקים:

$$rk\begin{pmatrix}A & B\\ -2A & 3B\end{pmatrix} \overset{R_2 \leftarrow R_2+2R_1}{=} rk\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & 5B\end{pmatrix} \underset{R_1 \leftarrow R_1 - 5R_2}{=} rk\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 5B\end{pmatrix} \underset{R_2 \leftarrow \frac{1}{5}R_2}{=} rk\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix} \underset{\text{ראינו בתרגול}}{=} rkA + rkB$$

ד) $\dim V = 3$, $\dim W = 3$, $V \neq W$ לכן $\dim V \cap W \leq 2$

לכן $\dim V+W \geq 4$ (משפט המימדים) לכן $\dim V+W = 4$ (כל המרחב)

לכן $\dim V \cap W = 2$.

4) או דרך אפשרית:

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & a_1 & & 0 & \\ \vdots & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 & a_{10} \end{vmatrix}_{11\times 11} \underset{C_n \leftarrow C_n - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1 & a_1 & & & -1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 0 & & 1 & a_{10}-1 \end{vmatrix}_{11\times 11} =$$

$$\underset{\text{לפי שורה 1}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & -1 \\ 0 & & 1 & a_{10}-1 \end{vmatrix}_{10\times 10} \underset{\text{לפי שורה 1}}{=} a_1 \begin{vmatrix} a_2 & & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & -1 \\ 0 & & 1 & a_{10} \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{10+1} \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_2 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & a_9 \\ & & 1 \end{vmatrix}}^{=1}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix} + (-1)^{12}$$

נסמן:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$ (שיניתי פה את המספור של ה-a)

קיבלנו:

$$D_n = a_n D_{n-1} + (-1)^{n+2}$$

תנאי התחלה: $D_1 = a_1$

אז:

$$D_2 = a_2 a_1 + 1 \quad D_3 = a_3 a_2 a_1 + a_3 - 1$$

$$D_4 = a_4 a_3 a_2 a_1 + a_4 a_3 - a_4 + 1$$

וניתן להוכיח באינדוקציה:

$$D_n = \left(\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+2-k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} a_{n-j}\right) + \prod_{i=1}^{n} a_i$$

4) ב)

$I_n = rkAB \Rightarrow rkAB = n$

$I_m = rkBA \Rightarrow rkBA = m$

לפי משפט:

$n = rkAB \le rkA \le n$,כי $A_{n\times m}$ $\Rightarrow$ $rkA = n$

$m = rkBA \le rkA \le m \Rightarrow rkA = m$ $\Rightarrow n = m$

$\boxed{\text{שאלה 5 היתה בתרגול}}$

מסמסר א' תספ״כ מוצג א' / מסוין אל סקר

1) א) $a = \frac{3}{2}$

ד) ראינו בכיתה כי $L_1, L_2 \ne L_1 \cap L_2 \Leftarrow \dim(L_1+L_2) \ge 2 + \dim(L_1 \cap L_2)$

2) א) מהנתון $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ בת"ל, לכן פורשים כי מימד

V הוא n ולכן $ImT = V \Rightarrow T$ על $\underset{\dim V = \dim V}{\Rightarrow}$ T איזומורפיזם

A

ד) נסמן T_A, T_B ההעתקות של הכפלה ב-A,B

אז $\mathbb{F}_p \xrightarrow{T_B} \mathbb{F}_n \xrightarrow{T_A} \mathbb{F}_m$! $T_A \circ T_B = T_{AB}$

ראינו בכיתה: $\cancel{Im(AB)}$ $Im(T_{AB}) = Im(T_A \circ T_B) = Im(T_A|_{ImT_B})$

כיוון ש $rkA = n$, $\dim ImT_A = n$ ולכן $\dim\ker T_A = 0$

לכן T_A חח"ע ולכן גם $T_A|_{ImT_B}$ חח"ע, לכן $\dim Im(T_A|_{T_B}) = \dim ImT_B$

dim (לא נכנס בסריקה)

סה"כ קיבלנו:

$$\underset{\overset{\shortparallel}{rkAB}}{\dim Im(T_{AB})} = \dim Im(T_A|_{T_B}) = \dim Im(T_B) = rkB$$

$\otimes$

3) א) לא היה בקורס (משתמשים בנוסחא ל-det כפול של מכפלות)

ב) לא היה בקורס

4) א) עשינו בשיעור. תשובה:

$$|\cdots| = \sum_{k=0}^{n-1} x^k(n-k)$$

הוכחה באינדוקציה - פיתוח לפי עמודה אחרונה.

ב) לא:

$$\dim(U+V+W) = \dim(U+V) + \dim W - \dim((U+V)\cap W)$$

$$= \dim U + \dim V + \dim W - \dim(U\cap V) - \dim((U+V)\cap W)$$

$$\overset{\text{לפי הנתון}}{=} \underbrace{3+3+3-2}_{7} \underbrace{-\dim((U+V)\cap W)}_{\overset{\vee\shortmid}{0}} \leq 7 < 8$$