סמסטר ב׳ תשע״א.

מבחן אלגברה לינארית 1
המרצה: פרופ׳ סמיון אלסקר
המתרגלת: ילנה גל.

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים ודף נוסחאות אחד A4.
משך הבחינה: 3 שעות. המחברת היא טיוטה ולא תיבדק.

שאלה 1.

(א) (18) מצאו בסיס כלשהו ב- $span$ של הווקטורים $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

(ב) (18) הוכיחו כי עבור מטריצות מרוכבות A,B מתקיים

$$rk\begin{bmatrix}A & 2A\\ 3B & B\end{bmatrix}=rk(A)+rk(B).$$

שאלה 2.

(א) (18) הוכיחו שיוויון עבור הדטרמיננטה מסדר $n\times n$:

$$\begin{vmatrix}a+b & ab & 0 & \dots & 0\\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots\\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots\\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b\end{vmatrix}=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+b^n.$$

(ב) (18) תהי $T:V\to W$ ט״ל של מרחבים וקטוריים נוצרים סופית, $\dim(V)>0$. נניח ש- T לא על. הוכיחו כי קיימת ט״ל $S:W\to V$ שהיא לא θ זהותית וגם $S\circ T=\theta$.

שאלה 3.

(א) (18) תהי $T:V\to V$ ט״ל של מרחב וקטורי נוצר סופית. נניח $TS=ST$ לכל ט״ל $S:V\to V$. הוכיחו שקיים סקלר λ כך ש- $Tx=\lambda x$ לכל x.

(ב) (18) מצאו בסיס כלשהו במאפס של תת-מרחב L ב- $\mathbb{R}^4$:

$$L=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{matrix}x+y+z+w=0\\ x-y-z+2w=0.\\ 2x+3w=0\end{matrix}\right.\right\}$$ כאשר אנו מזהים את המרחב הדואלי ל- $\mathbb{R}^4$ עם $\mathbb{R}^4$ באופן הסטנדרטי.

בהצלחה !!!