

סמסטר ב' תשע"א.

מבחן אלגברה לינארית 1
המרצה: פרופ' סמיון אלסקר
המתרגלת: ילנה גל.

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבוניס ודף נוסחאות אחד A4. משך הבחינה: 3 שעות. המחברת היא טיוטה ולא תיבדק.

שאלה 1.

(א) יהיו A, B מטריצות $m \times n$ ו- $n \times m$ בהתאמה. נניח כי המטריצות AB ו- BA הן מטריצות יחידה מסדר n ו- m . הוכיחו כי $m = n$.

(ב) יהיו V, W תתי מרחבים ב- \mathbb{R}^4

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}, V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

המימדים

של $V \cap W, V + W, V, W$.

שאלה 2.

$$\text{כאשר המטריצה היא } n \times n. \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$$

(א) הוכיחו (16)

(ב) תהי P מטריצה ממשית $n \times n$ הפיכה. מצאו מימד (מעל \mathbb{R}) של התת-מרחב $L = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(PX) = 0\}$ כאשר tr זה סכום של כל האיברים האלכסוניים של המטריצה.

שאלה 3.

(א) יהי V מ"ו נוצר סופית ו- $T: V \rightarrow V$ ט"ל הפיכה. יהי $L \subset V$ תת-מרחב לינארי כך ש- $T(L) \subset L$. הוכיחו שאם $x \in L$ אזי $T(x) \in L$.
 (ב) חישבו את דרגת המטריצה עבור כל פרמטר λ ממשי:

$$A = \begin{bmatrix} 7 - \lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19 - \lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13 - \lambda \end{bmatrix}$$

בהצלחה !!!