

**מבחן אלגברה לינארית 1**  
**המרצה: פרופ' סמיון אלסקר**  
**המתרגל: מיכאל סובסקי**

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבוני.  
משך הבחינה: 3 שעות. המחברת היא טיוטה ולא תיבדק.

**שאלה 1.**

(א) תהי  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  טרנספורמציה לינארית שנתונה ע"י

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

.  $\text{Im}(T)$  מצאו בסיס כלשהו ב-  $\text{Im}(T)$ .

(ב) חישבו את הדטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

**שאלה 2.**

(א) תהי  $T: V \rightarrow V$  טרנספורמציה לינארית. יהי  $e_1, \dots, e_n$  בסיס של  $V$ . הוכיחו כי  $T$  איזומורפיזם אם ורק אם  $Te_1, \dots, Te_n$  גם בסיס.

(ב) יהיו  $W_1, W_2, W_3$  תתי מרחב לינאריים של מ"ו נוצר סופית  $V$ . נניח  $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{\theta\}$ . האם הסכום  $W_1 + W_2 + W_3$  הוא תמיד ישר?

**שאלה 3.**

(א) תהי  $A$  מטריצה ממשית כך שכל האיברים שלה שווים ל-1. הוכיחו שהמטריצה

$$(I_n - A)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} A$$

הפיכה ו-  $I_n - A$

(ב) יהיו  $A, B \subset V$  תתי-מרחב לינאריים של מ"ו נוצר סופית. הוכיחו שהמאפסים מקיימים

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ + B^\circ$$

**בהצלחה!!!**