סמסטר א' תש"ע. מועד א'
תאריך הבחינה: 26.01.2010

מבחן אלגברה לינארית 1
המרצה: פרופ' סמיון אלסקר
המתרגלות: ילנה גל ,אורית רז.

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים.
משך הבחינה: 3 שעות. המחברת היא טיוטה ולא תיבדק.

שאלה 1.

(א) (18) להוכיח:

$$\det\begin{bmatrix} a_1+x & x & \dots & x \\ x & a_2+x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & a_n+x \end{bmatrix} = a_1\cdots a_n + x(a_1\cdots a_{n-1} + a_1\cdots a_{n-2}a_n + \cdots + a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n)$$

(ב) (18) להוכיח ש $M_n(\mathbb{F}) = U \oplus V$ כאשר $U = \left\{A \mid A = -A^t\right\}$ ו- V זה תת המרחב של כל המטריצות המשולשות עליונות.

שאלה 2.

(א)(18) למצוא כל p ראשוניים כל שקבוצת ווקטורים $\{(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$ בת"ל מעל $\mathbb{Z}_p$

(ב)(18) הוכיחו שקיימת ט"ל יחידה $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ כך ש-

$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ורשמו את המטריצה של T בבסיס הסטנדרטי,

כלומר רשמו את $[T]_E^E$, $E = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

שאלה 3.

(א)(18) יהי $V = \mathbb{R}_n[x]$ ונגדיר פונקציונלים לינאריים על V: $\alpha_i(p) = p^{(i)}(0)$ (כאשר $p^{(i)}$ הנגזרת ה- i של p). הראו כי $\{\alpha_i\}_{i=0,\dots,n}$ בסיס ל- V^*.

(ב)(18) תהינה $A,B \in M_n(F)$. נניח $rk(A), rk(B) \neq n-1$. הוכיחו כי $adj(AB) = adj(B)\cdot adj(A)$.

בהצלחה !!!