סמסטר א' תשס"ח. מועד ב'
תאריך הבחינה 23.05.2008

<u>מבחן אלגברה לינארית 1</u>
<u>המרצה: פרופ' סמיון אלסקר</u>
<u>המתרגלים: אדם גל-פוליטקובסקי, מיכאל חנבסקי</u>

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים .
משך הבחינה: 3 שעות. המחברת היא טיוטה ולא תיבדק.

שאלה 1.

(12) (א) חישבו את הדטרמיננטה של המטריצה מסדר n :
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(14) (ב) חישבו את הדטרמיננטה מסדר n :
$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$
כאשר כל f_i הוא פולינום מדרגה $n-2$ לכל היותר.

שאלה 2.

(13) (א) מצאו את כל הערכים הממשיים של λ שעבורם הוקטור $b=(1,3,5)$ מהווה צירוף לינארי של הוקטורים $a_1=(3,2,5), a_2=(2,4,7), a_3=(5,6,\lambda)$.

(13) (ב) נסמן ב- $\mathbf{R}[x]_n$ את מרחב הפולינומים הממשיים מדרגה n לכל היותר. יהי $L \subset \mathbf{R}[x]_n$ תת מרחב לינארי שלכל $k=0,1,\dots,m$ מכיל לפחות פולינום אחד מדרגה k, ולא מכיל פולינומים מדרגה גדולה מ- m. הוכיחו כי $L=\mathbf{R}[x]_m$.

שאלה 3.

(13) (א) יהי V מ"ו ממימד סופי, ו- L תת מרחב לינארי שלו. הוכיחו כי קיימת ט"ל $\varphi: V \to V$ ש- $Ker(\varphi)=L$.

(13) (ב) הוכיחו כי $rk(A+B) \le rk(A)+rk(B)$ עבור מטריצות A,B מאותו סדר.

שאלה 4.

(11) (א) תהי $T:V \to V$ ט"ל של מרחב וקטורי ממימד סופי. נגיד כי תת מרחב לינארי $L \subset V$ הוא T-אינווריאנטי אם $T(L) \subset L$. הוכיחו כי חיתוך של מספר כלשהו של תתי מרחב T-אינווריאנטיים הוא גם T-אינווריאנטי.

(15) (ב) הוכיחו כי אם כל תת מרחב של V ממימד $\dim(V)-1$ הוא T-אינווריאנטי, אזי קיים בסיס של V שבו המטריצה של T היא אלכסונית.

בהצלחה !!!