סמסטר א׳ תשס״ח. מועד א׳
תאריך הבחינה 08.04.2008

<u>מבחן אלגברה לינארית 1</u>
<u>המרצה: פרופ׳ סמיון אלסקר</u>
<u>המתרגלים: אדם גל-פוליטקובסקי, מיכאל חנבסקי</u>

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים .
משך הבחינה: 3 שעות. המחברת היא טיוטה ולא תיבדק.

שאלה 1.

(11) (א) נתבונן בשני תתי מרחב לינאריים ב- $\mathbf{R}^4$ $L = span\{(1,2,1,0),(-1,1,1,1)\}$, $M = span\{(2,-1,0,-1),(1,-1,3,7)\}$. מצאו בסיסים כלשהם של $L+M$, $L\bigcap M$.

(15) (ב) יהיו L, M שני תתי מרחב לינאריים של מרחב V ששניהם שונים מ- V. הוכיחו כי $L\bigcup M \neq V$.

שאלה 2.

(12) (א) יהי U תת מרחב של n-יות ב- $\mathbf{R}^n$ שמקיימות $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$. יהי V תת מרחב של n-יות שמקיימות $x_1 = x_2 = ... = x_n$. הוכיחו כי $\mathbf{R}^n = U \oplus V$.

(14) (ב) עבור מטריצה $A = (a_{ij})$ בגודל $n\times n$ נגדיר עיקבה (trace) של A ע״י $tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$. הוכיחו כי לכל שתי מטריצות $X_{m\times n}, Y_{n\times m}$ מתקיים $tr(XY) = tr(YX)$.

שאלה 3.

(11) (א) נניח כי סדרת וקטורים v_1, v_2, v_3 במרחב וקטורי V היא בת״ל. האם הסדרה $v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_2, v_1 + v_3$ היא בת״ל? לנמק.

(15) (ב) חישבו את דרגת המטריצה

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ -2^{1-n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

שאלה 4.

(15) (א) הוכיחו כי הדטרמיננטה של

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{bmatrix}$$

שווה ל- $a_0x_1x_2\dots x_n + a_1y_1x_2x_3\dots x_n + a_2y_1y_2x_3\dots x_n + \cdots + a_ny_1y_2y_3\dots y_n$.

(11) (ב) מצאו מטריצה ממשית $X_{3\times 3}$ שמקיימת את המשווה

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

בהצלחה !!!