סמסטר א' תשס"ה. מועד ב'
תאריך הבחינה: 04.03.2005

מבחן באלגברה לינארית 1

שם המרצה: פרופ' אלסקר סמיון
שם המתרגלים: אסף הדרי, קובי קרמניצר

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים.
משך הבחינה: 3.5 שעות.
בשאלות 1-4 יש לכתוב את התשובות הסופיות בלבד בעמוד הראשון של המחברת.
בשאלה 5 יש לכתוב את ההוכחות המלאות בדפים 2-4 של המחברת.

שאלה 1.

(11) (א) נתונה מערכת משוואות $Ax=0$ כאשר A היא מטריצה ממשית מסדר $m\times n$.
נסמן $C(A),R(A),V$ מרחב הפתרונות, $span$ של השורות ו- $span$ של העמודות בהתאמה.
אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. אם $m=n$ אזי $C(A)=R(A)$

b. $\dim R(A)+\dim V=n$

c. $\dim C(A)=\dim R(A)$

(11) (ב) יהי V מרחב של מטריצות ממשיות מסדר 2×2. תהי W_1 תת-מרחב המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} x & -2x \\ y & z \end{pmatrix}$ ותהי W_2 תת-מרחב המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} 2a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$, כאשר $x,y,z,a,b,c\in\mathbf{R}$.
אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. קיים איזומורפיזם של V לעצמו שמעביר W_1 ל W_2

b. $W_1\oplus W_2=V$

c. $W_1+W_2=V$

שאלה 2.

(10) (א) עבור מטריצות $A_{n\times n}$, $a_{i,j}\in\mathbf{C}$
אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. $A^2=I \Leftarrow A=I$ או $A=-I$

b. קיימת A שאינה אלכסונית כך ש: $A^2=I$ ובנוסף $tr(A)=0$

(12) (ב) יהי V מ"ו. איזה מהטענות הבאות נכונה (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. יהיו $u,v,w\in V$ וקטורים. אם כל הזוגות $\{u,v\},\{u,w\},\{v,w\}$ בת"ל אזי גם השלישיה $\{u,v,w\}$ היא בת"ל.

b. יהיו $u,v,w\in V$ וקטורים. אם $\{u,v,w\}$ בת"ל אזי $\{u+v+w,u+2v,u-w\}$ גם בת"ל.

שאלה 3.

(12) (א) יהיו A,B תתי-קבוצות של מ"ו V. איזה מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. $span(A\cup B)=span(A)+span(B)$.

b. $span(A\cap B)=span(A)\bigcap span(B)$.

(10) (ב) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{bmatrix}$$

בחרו תשובה אחת בלבד:

a. $(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$

b. $a_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$

c. $a_0(x^{n-1}-a_1-a_2-\dots-a_n)$

שאלה 4

(12) (א) יהיו $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. אם A,B מטריצות אנטיסימטריות אזי AB מטריצה סימטרית

b. אם $A^TA=0$ אזי $A=0$

c. אם A מטריצה אנטיסימטרית והפיכה אזי A^{-1} גם כן אנטיסימטרית

הערה: מטריצה X נקראת סימטרית אם $X^t=X$, ואנטיסימטרית אם $X^t=-X$.

(10) (ב) פתרו מערכת משוואות ליניאריות עבור כל פרמטר λ מרוכב:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=\lambda^2+3\lambda \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda^3+3\lambda^2 \\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^4+3\lambda^3 \end{cases}$$

בחרו תשובה אחת בלבד:

a. עבור $\lambda\neq0,-3$ $\begin{cases} x_1=2-\lambda^2 \\ x_2=2\lambda-1 \\ x_3=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1 \end{cases}$, עבור $\lambda=0$ $x_1=-x_2-x_3$, עבור $\lambda=-3$ $x_1=x_2=x_3$.

b. עבור $\lambda\neq0,-3$ $\begin{cases} x_1=2+\lambda^2 \\ x_2=2\lambda+1 \\ x_3=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1 \end{cases}$, עבור $\lambda=0$ $x_1=-x_2-x_3$, עבור $\lambda=-3$ $x_1=x_2=x_3$.

c. עבור $\lambda\neq0,-3$ $\begin{cases} x_1=2-\lambda^2 \\ x_2=2\lambda-1 \\ x_3=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1 \end{cases}$, עבור $\lambda=0,-3$ $x_1=-x_2-x_3$.

שאלה 5

(10) (א) יהי $n\in\mathbb{N}$. הוכיחו כי הפונקציות $e^x,e^{2x},\dots,e^{nx}$ הן בת"ל.

(12) (ב) תהי $A\in M_n(F)$. נתבונן בטרנספורמציה ליניארית $T:M_n(F)\to M_n(F)$ שמוגדרת $T(X)=AX-XA$. הוכיחו כי T היא לא על.