סמסטר א' תשס"ה. מועד א'

תאריך הבחינה: 01.02.2005

מקצוע: אלגברה ליניארית 1

שם המרצה: פרופ' אלסקר סמית

שם המתרגלים: אל... קורי, קובי קרמניצר

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים.

משך הבחינה: 3.5 שעות.

בשאלות 1-4 יש לכתוב את התשובות הסופיות בלבד בעמוד הראשון של המחברת.

בשאלה 5 יש לכתוב את ההוכחות המלאות בדפים 2-4 של המחברת.

שאלה 1.

(11) (א) לחשב את דרגת המטריצה עבור כל פרמטר λ ממשי:

$$A=\begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}.$$

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) $rkA=3$ לכל λ. (b) $rkA=\begin{cases} 3, \lambda\neq 1,5,-5 \\ 2, \lambda=1 \\ 1, \lambda=5,-5 \end{cases}$. (c) $rkA=\begin{cases} 3, \lambda\neq 1,5,-5 \\ 2, \lambda=1,5,-5 \end{cases}$.

(11)(ב) לפתור את המערכת

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ldots+nx_n=b_1 \\ 2x_1+3x_2+\ldots(n+1)x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nx_1+(n+1)x_2+\ldots+(2n-1)=b_n \end{cases}.$$

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) אם קיימים $2\leq i,j\leq n$ כך ש- $b_i-b_{i-1}\neq b_j-b_{j-1}$ אז אין פתרון. אחרת

$$\begin{cases} x_1=(2b_2-3b_1)+\sum\limits_{i=3}^{n}(i-2)x_i \\ x_2=(2b_1-b_2)-\sum\limits_{i=3}^{n}(i-1)x_i \end{cases}$$

כאשר $x_3,\ldots,x_n$ מספרים כלשהם.

(b) אם קיימים $2\leq i,j\leq n$ כך ש- $b_i-b_{i-1}\neq b_j-b_{j-1}$ אז אין פתרון. אחרת

$$\begin{cases} x_1=(2b_2-3b_1)-\sum\limits_{i=3}^{n}(i-2)x_i \\ x_2=(2b_1-b_2)+\sum\limits_{i=3}^{n}(i-1)x_i \end{cases}$$

כאשר $x_3,\ldots,x_n$ מספרים כלשהם.

(c) $x_i=ib_i-(i-1)$ לכל $1\leq i\leq n$.

שאלה 2.

(11)(א) יהיו U,V,W תתי-מרחבים ליניאריים של מ"ו L נוצר סופית. אילו מהטענות הבאות נכונות:

(1) $(U+V)\cap W=(U\cap W)+(V\cap W)$. (2) $(U\cap V)^*=U^*+V^*$.

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) (1). (b) (2). (c) שתיהן נכונות. (d) שתיהן לא נכונות.

(11)(ב) חישבו את הדטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) -1. (b) $-a_1a_2\cdots a_n$. (c) $-a_1\cdots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$.

(d) $(a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)$.

שאלה 3.

(14)(א) יש לקבוע בכל סעיף האם קיימת ט"ל T שמקיימת את הטענות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

(a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כך ש- $T(1,1)=(1,-1,3), T(-1,1)=(2,-2,6)$.

(b) $T:\mathbb{R}^5\to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ כך ש- $\operatorname{Im}T=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^5$ כך ש- $KerT=span\{(0,1,1),(1,1,-1)\}$,
$\operatorname{Im}T=span\{(0,1,1,2,0),(1,1,1,-2,1)\}$.

(8)(ב) למה שווה מימד של $\mathbb{C}^n$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. בחרו אחת מהתשובות הבאות.

(a) n. (b) $2n$ (c) $4n$. (d) $\frac{n}{2}$.

שאלה 4.

(12)(א) יהי $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ ט"ל עם המטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ביחס לבסיסים הסטנדרטיים. תהי $R:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ ט"ל עם המטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ביחס לבסיסים הסטנדרטיים. נסמן $U=KerT, V=\operatorname{Im}R$. מצאו מימדים של $U+V$ ו- $U\cap V$.

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) $\dim(U+V)$ [illegible] $\dim(U\cap V)=2$. (b) $\dim(U+V)=4, \dim(U\cap V)=0$.

(c) $\dim(U+V)=3, \dim(U\cap V)=1$. (d) $\dim(U+V)=4, \dim(U\cap V)=1$.

(10)(ב) תהי A מטריצה $n\times n$ עם מקדמים שלמים. נניח כי A^{-1} קיימת וגם לה יש מקדמים שלמים. למה יכולה להיות שווה הדטרמיננטה של A? בחרו אחת מהתשובות הבאות.

(a) מספר שלם כלשהו. (b) 1 בלבד. (c) 1 או -1. (d) [illegible]

שאלה 5.

(12)(א) יהיו V,W מ"ו נוצרים סופית ויהיו $f,g:V\to W$ ט"ל. הוכיחו כי אם $Ker(f)\subseteq Ker(g)$ אזי קיימת ט"ל $h:W\to W$ כך ש- $h\circ f=g$.

(10)(ב) תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה. הוכיחו ש

$adj(adj(adj(A)))=(\det A)^{(n-2)(n-1)}adj(A)$.

בהצלחה!!!