

מבחן אלגברה לינארית 1
שם המרצה: דר" אלסקר סמיון

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבוני. משך הבחינה: 3.5 שעות.

שאלה 1.

(א) מצאו את כל הערכים המרוכבים של a עבורם אין פתרון למערכת הבאה:

$$\begin{cases} x + (1-a)y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x - ay + (a+1)z = 4 \end{cases}$$

(ב) יהיו L_1 ו- L_2 תתי-מרחבים לינאריים של מרחב לינארי V ממימד סופי. הוכיחו כי אם

$$\dim(L_1 + L_2) = 1 + \dim(L_1 \cap L_2)$$

שווה לאחד מתתי-מרחבים האלה, והזיתוך $L_1 \cap L_2$ שווה לשני.

שאלה 2.

(א) תהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית במרחב n - ממדי V . נניח כי עבור הוקטורים v_1, \dots, v_n מ- V הוקטורים Tv_1, \dots, Tv_n הם בלתי תלויים לינאריים. הוכיחו כי הפיכה T הפיכה.

(ב) יהיו A, B שתי מטריצות, $rkA = n$. הוכיחו כי $rk(AB) = rkB$.

שאלה 3.

(א) תהי A מטריצה מרוכבת הרמיטית (hermitian), כלומר $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$. עבור כל i, j . הוכיחו כי $\det A$ הוא מספר ממשי.

(ב) יהיו A, B מטריצות $n \times n$, הפיכה. הוכיחו כי הפולינומים האופייניים של המטריצות AB ו- BA שווים.

שאלה 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{bmatrix}$$

(א) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה.

(7) (ב) האם קיימים תתי-מרחבים $U, V, W \subseteq F^n$ כך ש- $\dim(U + V + W) = 8$, $\dim(U \cap V) = 2$, $\dim U = \dim V = \dim W = 3$?

שאלה 5.

(22) הוכיחו כי כל שני מרחבים לינאריים ממימד n מעל אותו שדה הם איזומורפיים.