פתרון למועד א' תשס"ח
אלגברה לינארית 1

(1) (א) יהי $A\in F^{n\times m}$, $B\in F^{m\times k}$

ונגדיר $C=AB\in F^{n\times k}$.

כידוע לפי משפט דרגת השורות של C שווה לדרגת העמודות ולכן נוכל את $rank(C)$ כאחת הדרגות

(ב) לפי שורות לכל i

$$R_i(C)=\underset{\text{כפל שורה}}{R_i(AB)}=R_i(A)\cdot B\in R(B) \quad \text{- מרחב השורות של } B$$

$$\Downarrow$$

$$R(C)=Sp\{R_i(C)\}_{i=1}^{n}\leq R(B)$$

$$\Downarrow$$

$$rank(C)=\dim R(C)\leq \dim R(B)=rank(B)$$

(ג) לפי עמודות לכל i

$$C_i(C)=C_i(AB)=A\cdot C_i(B)\in C(A) \quad \text{- מרחב העמודות של } A$$

$$\Downarrow$$

$$C(C)=Sp\{C_i(C)\}_{i=1}^{k}\leq C(A)$$

$$\Downarrow$$

$$rank(C)=\dim C(C)\leq \dim C(A)=rank(A)$$

$rank(AB)\leq \min\{rankA, rankB\}$ כנדרש

א) (i) נניח ש A הפיכה $\iff \operatorname{rank} A = n \Longrightarrow \min\{r(A), r(B)\} = r(B)$

מכיוון שלפי ג׳ $\operatorname{rank} AB \le \min\{r(A), r(B)\} = r(B)$

ומצד שני לפי ג׳

$$\operatorname{rank}\{A^{-1}(AB)\} \le \min\{\operatorname{rank} A^{-1}, \operatorname{rank} AB\} = \min\{n, \operatorname{rank} AB\} = \operatorname{rank}\{AB\}$$

$\| \\ \operatorname{rank}(B)$

$$\Downarrow$$

לכן $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$ כנדרש.

נניח ש B הפיכה $\iff \operatorname{rank} B = n \Longrightarrow \min\{r(A), r(B)\} = r(A)$

ולפי משפט ג׳ $r(AB) \le r(A)$

ומצד שני לפי ג׳

$$r(A) = r((AB)B^{-1}) \le \min\{r(AB), r(B^{-1})\} = \min\{r(AB), n\} = r(AB)$$

$$\Downarrow$$

$r(AB) = r(A)$ כנדרש.

(ii) נזכיר של כל מטריצה $A \in F^{m\times n}$ ניתן להתאים העתקה לינארית

$$A : F^n \longrightarrow F^m$$

כעת נשתמש במשפט הדרגה של העתקה לינארית שאומר

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A = \dim F^n = n$$

$\ker(A) = \{v \in F^n \mid Av = 0\}$

$\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rank} A \Longleftarrow \operatorname{Im}(A) = \{Av \mid v \in F^n\} = C(A)$ – מרחב העמודות של A

כנדרש $\dim\{v \in F^n \mid Av = 0\} + \operatorname{rank} A = n$

[illegible]

(ג) נתון $T:\mathbb{F}_2[x]\longrightarrow\mathbb{F}^3$ כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{Z}_3$

~~(ב) נתון בסיס של $\mathbb{F}_2[x]$: $B=\{1+2x+x^2,\ 1+x+2x^2,\ 2+x+x^2\}$~~

(א) נוכיח ש-T הפיכה: $\dim\mathbb{F}_2[x]=3=\dim\mathbb{F}^3$

נקבל ממשפט ההרכבה כי T חח"ע $\iff$ T על

ולכן T איזו $\iff$ T חח"ע $\iff$ T על

מצאנו הוקטורים $\{T(u_1),T(u_2),T(u_3)\}=\{\overset{v_1}{(1\,1\,2)},\overset{v_2}{(2\,1\,1)},\overset{v_3}{(1\,2\,1)}\}$ שייכים לתמונה של T

וכן בת"ל ולכן

$$\dim\operatorname{Im}T\geq 3$$

ומצד שני $\operatorname{Im}T\leq\mathbb{F}^3 \Rightarrow \dim\operatorname{Im}T\leq 3$

ומכאן: $\dim\operatorname{Im}T=3 \Rightarrow \operatorname{Im}T=\mathbb{F}^3$ ולכן T על.

(ב) נשים לב שכיוון ש-T הפיכה! $\{Tu_1,Tu_2,Tu_3\}$ בסיס כי מיפוי בסיס של $\{u_1,u_2,u_3\}$ בסיס

(ג) נשים לב שכיוון ש-$A=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס הם בסיס ל-$\mathbb{F}^3$

ניתן להגדיר את T^{-1} באופן הבא:

$$T^{-1}(v_1)=T^{-1}(1\,1\,2)=1+2x+x^2=u_1$$
$$T^{-1}(v_2)=T^{-1}(2\,1\,1)=1+x+2x^2=u_2$$
$$T^{-1}(v_3)=T^{-1}(1\,2\,1)=2+x+x^2=u_3$$

לכן נסמן $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ בסיס ל-$\mathbb{F}_2[x]$ ונקבל ש

$$[T]^{S_1}_{S_2}=[I]^{B}_{S_2}[T^{-1}]^{A}_{B}[I]^{S_1}_{A}$$

$$[T^{-1}]^{A}_{B}=\left([T(v_1)]_B,[Tv_2]_B,[Tv_3]_B\right)$$

$$=\left([u_1]_B,[u_2]_B,[u_3]_B\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

נקבל $[I]^{B}_{S_2} = \left([u_1]_{S_2}, \quad [u_3]_{S_2}\right)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[I]^{S_1}_{A} = \left([I]^{A}_{S_1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad !$$

ולכן נותר לחשב ולסיים.

ג) כעת

$$[T^{-1}(a,b,c)]_{S_2} = [T^{-1}]^{S_1}_{S_2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \dots$$

לפי החישוב.

3) א) צריך להוכיח איזו. צריך להוכיח: 1) T הפיך 2) T חח"ע 3) T על.

1) יהיו $X, Y \in F^{n\times n}$ ו- $\alpha \in F$ אז

$$T(X+\alpha Y) = B\cdot(X+\alpha Y) = BX + \alpha BY = T(X) + \alpha T(Y)$$

2) + 3) כיוון ש- $T: V \to V$ נקבל ממשפט הדרגה כי

T חח"ע $\iff$ T על

ולכן מספיק להוכיח את אחת מהן. נוכיח חח"ע!

יהי $X \in \ker T \iff BX = 0$ / נכפיל משמאל A $\Longrightarrow ABX = A0 = 0$

$\Longrightarrow IX = 0 \Longrightarrow X = 0 \Longrightarrow \ker T = \{0\} \Longrightarrow$ T חח"ע $\Longrightarrow$ T על

ג) לפי תרגיל ה T על ולכן לכל איבר בטווח יש מקור. בפרט $I \in F^{n\times n}$ $\Leftarrow$ קיים $X \in F^{n\times n}$ כך ש:

$$T(X) = I \Longrightarrow BX = I.$$

נותר להוכיח $A = X$ אכן!

$$A = AI = A\cdot(BX) = (AB)X = IX = X$$

ולכן $X = A$ וכמו כן $AB = BA = I$ ולכן B הפיכה

המשך ←

(ז-1) (א) **משפט ההחלפה של שטייניץ**

יהא V מ"ו ויהי $A \subseteq V$ בת"ל ו- $B \subseteq V$ פורשת

אזי לכל $a \in A$ קיים איבר $b \in B$ כך ש- $b \notin A \setminus \{a\}$

והקבוצה $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ בת"ל

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $a \in A$ כך שלכל $b \in B$

או $b \in A \setminus \{a\}$ או $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ ת"ל.

כלומר יהי $b \in B$ אם $b \in A \setminus \{a\} \Longrightarrow b \in Sp\{A \setminus \{a\}\}$

או $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ ת"ל אבל כיוון ש-

A בת"ל $\Longrightarrow$ $A \setminus \{a\}$ בת"ל ולכן שלה מוכלת

אם $A \setminus \{a\}$ בת"ל ו- $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ ת"ל אז b הוא

צירוף לינארי של איברי $A \setminus \{a\}$ או במילים אחרות

$b \in Sp\{A \setminus \{a\}\}$

קיבלנו שבכל מקרה $b \in Sp\{A \setminus \{a\}\}$ וזה נכון לכל $b \in B$

ולכן $B \subseteq Sp\{A \setminus \{a\}\} \Longrightarrow V = Sp(B) \leq Sp(A \setminus \{a\}) \leq V$

וזה אומר $V = Sp\, A \setminus \{a\}$

ולכן $a \in V$ אבל $a \in Sp\, A \setminus \{a\}$ וזה גורר ש- $(A \setminus \{a\}) \cup \{a\} = A$ ת"ל

סתירה. ולכן המשפט נכון.

(ב) **אפשרויות אחרות**

(1) את $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ נחליף ב- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

או את $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ נחליף ב- $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

או את $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ נחליף ב- $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

ב) יהי $v\in B$.

צ"ל קיימים $w_{1,2}\in C$ כך שהעתקה הלינארית המוגדרת ע"י

$A=(v,w_1,w_2)$ עבור $T(x)=Ax$

היא על.

<u>הוכחה:</u> נשים לב כי T הינה על $\iff \mathrm{rank}(T)=3$

$\iff$ $\{v,w_1,w_2\}$ בסיס ולכן מספיק להוכיח

שקיימים $w_{1,2}\in C$ כך ש $\{v,w_1,w_2\}$ בסיס. נסמן $B=\{v,v_1,v_2\}$

לפי משפט ההחלפה של שטייניץ עבור A ו C.

עבור $v_1\in A$ קיים $w_1\in B$ כך ש $w_1\in\{v,v_2\}$!

הוא $A_1=\{v,v_2,w_1\}$ בסיס.

כעת שוב לפי משפט ההחלפה עבור A_1 ו C נקבל

שעבור $v_2\in A_1$ קיים $w_2\in C$ כך ש $w_2\notin\{v,w_1\}$!

ולכן $A_2=\{v,w_1,w_2\}$ בסיס וסיימנו.

<u>הערה:</u> כמובן שאפשר היה לעשות זאת ישירות עבור C ו $v\in A$

אבל כך יותר נוח. ארוך ומיותר.