פתרון מבחן באלגברה לינארית

מרצה: ד"ר אלכס קזין, תשע"ג.

הערה: נשתדל להתייחס לשאלות גם מנקודת מבט של העתקות לינאריות.

תרגיל 1:

יהי $V=\{(x_1,\dots,x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i=0\} \subseteq F^n$, F שדה.

(א) הראה: V תת מרחב של F^n

<u>פתרון:</u>

<u>דרך 1:</u>

בעזרת הקריטריון המקוצר לתת מרחב:

$V\subseteq F^n$ - נתון

$\vec{0}\in V$: $0+\dots+0=0$

<u>סגירות לחיבור</u>: יהיו $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$.

$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=(x_1+y_1)+\dots+(x_n+y_n)\underset{\text{קיבוץ וחילוף ב-}F}{=}(x_1+\dots+x_n)+(y_1+\dots+y_n)=$$

$$\underset{\vec{x},\vec{y}\in V}{=}\vec{0}+\vec{0}=0$$

$\Leftarrow$ $\vec{x}+\vec{y}\in V$

<u>סגירות לכפל בסקלר</u>: יהי $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in V$, $\alpha\in F$

$\alpha\vec{x}=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)$

$$\alpha x_1+\dots+\alpha x_n\underset{\text{פילוג ב-}F}{=}\alpha(x_1+\dots+x_n)=\alpha\cdot 0=0$$

$\Leftarrow$ $\alpha\vec{x}\in V$

מהקריטריון המקוצר לתת מרחב, V תת מרחב של F^n

דרך 2: הפונקציה $T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ המוגדרת $T(x_1,\dots,x_n)=x_1+\dots+x_n$ היא העתקה

לינארית: $T(x_1,\dots,x_n)=(1,\dots,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ וכפל במטריצה.

הכפלה משמאל היא העתקה לינארית

לכן: $Ker(T)=V$ תת מרחב של $\mathbb{F}^n$

דרך 3: V הוא מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות

ההומוגנית $x_1+\dots+x_n=0$

(ב) נמצא בסיס של V

פתרון: דרך 1: נניח $x_1+\dots+x_n=0$, אז $x_1=-x_2-x_3-\dots-x_n$

$$(\star)\quad (x_1,\dots,x_n)=(-x_2-x_3-\dots-x_n, x_2,x_3,\dots,x_n)=$$

$$=x_2(-1,1,0,\dots 0)+x_3(-1,0,1,0,\dots,0)+x_n(-1,0,\dots,0,1)$$

ניקח: $B=\{(-1,1,0,\dots,0),(-1,0,1,0,\dots,0),\dots,(-1,0,\dots,0,1)\}$

מ-$(\star)$ נובע ש-B פורשת את V.

B בת"ל: נניח ש:

$$\alpha(-1,1,0,\dots,0)+\alpha_2(-1,0,1,0,\dots 0)+\alpha_{n-1}(-1,0,\dots,0,1)=\vec{0}$$

$$\|$$

$$(-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{n-1}, \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1})$$

מכאן, $\alpha_1=\dots=\alpha_{n-1}=0$ (מרכיבים 2 עד n וקטורים)

$B\subseteq V$ בת"ל ופורשת, לכן בסיס של V.

דרך 2: מגדירים את B ורואים שפורשת כמו בדרך 1

$T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}$ היא ונשים לב $\underset{im(T)}{T(1,0,\dots,0)}=1\neq 0$

$\Leftarrow dim(im(T))\geq 1$ נשים לב כיוון ש-$im(T)\subseteq\mathbb{F}$ גם

$dim(im(T))\leq dim\,\mathbb{F}=1$ אז, $dim(im(T))=1$, לכן $im(T)=\mathbb{F}$

ממשפט הדרגה של העתקה לינארית:

$$\underbrace{dim(Ker(T))}_{(א)\ V}+\underbrace{dim(im(T))}_{1}=dim(\mathbb{F}^n)=n$$

$$\Rightarrow dim(V)=n-1=\#B$$

B פורשת את V ומספר איברים $= dim\,V$.

לכן B בסיס של V.

(ב) כמה וקטורים יש ב-V אם $\mathbb{F}=\mathbb{Z}_p$?

<u>פתרון:</u>

<u>דרך 1:</u> $\#B=n-1$. לכל $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{Z}_p^{n-1}$,

$\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_{n-1}v_{n-1}\in V$ (כאשר $B=\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$)

B פורשת ולכן מקבלים כך את כל איברי V.

B בת"ל, לכן כל איבר של V מתקבל פעם

אחת בלבד בצורה כזו. לכן $\#V=\#(\mathbb{Z}_p^{n-1})=p^{n-1}$

<u>דרך 2:</u> $[\ ]_B : V\to\mathbb{Z}_p^{n-1}$ הוא איזומורפיזם,

ולכן חח"ע ועל. $\#V=\#\mathbb{Z}_p^{n-1}=\#p^{n-1}$

תרגיל 2:

יהי V מרחב וקטורי, U,W תתי מרחבים, ונניח:

$\dim(V)=10$, $\dim(W)=6$, $\dim(U)=9$.

(א) מה ניתן לומר על $\dim(U\cap W)$ ומדוע?

<u>פתרון:</u>

משפט המימדים

$$\dim(V)\geq\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$

U+W תת מרחב של V.

$$\Rightarrow 10\geq 9+6-\dim(U\cap W)$$
$$\dim(U\cap W)\geq 5$$

$U\cap W$ תת מרחב של W, לכן: $\dim(U\cap W)\leq\dim W=6$

לכן: $5\leq\dim(U\cap W)\leq 6$

נראה ע"י דוגמאות שכל ערך אפשרי אכן מתקבל:

$$W=\mathbb{R}^6\times\{0\}^4\subseteq U=\mathbb{R}^9\times\{0\}\subseteq V=\mathbb{R}^{10}$$

$U\cap W=W$, לכן: $\dim(U\cap W)=\dim(W)=6$

דוגמא נוספת:

$$W=\mathbb{R}^5\times\{0\}^4\times\mathbb{R}\ ;\ U=\mathbb{R}^5\times\{0\}\subseteq V=\mathbb{R}^{10}$$

$$U\cap W=\mathbb{R}^5\times\{0\}^5$$

$$\Rightarrow\dim(W\cap U)=5$$

$\square$

(ב) נניח $W \not\subseteq U$

(i) מהו $W+U$?

(ii) הראו כי כל 6 וקטורים של W הנמצאים ב-U הם תלוים לינארית.

פתרון:

דרך 1:

(i) ניקח $w \in W \setminus U$ וניקח בסיס $\{u_1, \dots, u_9\}$ ל-U.

אז $u_1, \dots, u_9, w$ בת"ל (אחרת $u_1, \dots, u_9, w$ הם תלוים לינארית.

אז אחד מהם היה צירוף לינארי של קודמיו. זה לא

יכול להיות u_i כי $u_1, \dots, u_i$ בת"ל ולכן זה w,

ולכן $w \in U$, סתירה.)

$u_1, \dots, u_9, w \in U \cup W \subseteq U+W$ 10 וקטורים בת"ל.

$\Rightarrow \dim(U+W) \geq 10$

$U+W$ תת מרחב של V ו- $\dim V = 10 \Rightarrow U+W=V$.

דרך 2:

$W \not\subseteq U$, לכן $U \cap W \subset W$,

לכן $\dim(U \cap W) < \dim W = 6$ ומ-(א) $\dim(U \cap W) = 5$

$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) =$

$= 9 + 6 - 5 = 10$

$U+W$ תת מרחב של V ומימדם זהה

לכן $U+W = V$.

(ii) - הראינו ש- $\dim(U \cap W) = 5$, לכן אם

$w_1, \dots, w_6 \in W$ ונמצאים ב-U, אז $w_1, \dots, w_6 \in \underbrace{U \cap W}_{\text{מימד 5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow w_1, \dots, w_6$ תלוים לינארית.

תרגיל 3:

נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

(i) פתור את המערכת ומצא בסיס למרחב הפתרונות.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{array}{cccc} s & & & t \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$x_4 = t$, $x_3 + 8t = 0 \Rightarrow x_3 = -8t$

$x_1 = s$, $2s + x_2 - 3t = 0 \Leftrightarrow x_2 = 3t - 2s$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s, 3t-2s, -8t, t) = s(1,-2,0,0) + t(0,3,-8,1)$

לכן $B = \{(1,-2,0,0), (0,3,-8,1)\}$ פורשת את מרחב הפתרונות ובת"ל, ולכן בסיס שלו.

(ii) מצא את הפתרון של המערכת הקודמת אם מחליפים את $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ במקום $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1} \left(\ast \ \text{(כמו מקודם)} \ \middle| \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{matrix} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \begin{array}{cccc} s & & & t \\ \end{array} \left(\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

$x_3 = -4 - 8t \Leftarrow x_3 + 8t = -4$

$x_2 = 3t - 2s + 2 \Leftarrow 2s + x_2 - 3t = 2$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s, 3t-3s+2, -8t-4, t)$

$t, s \in \mathbb{Q}$ כלשהם.

-6-

(iii)

תהי $T:\mathbb{Q}^4\to\mathbb{Q}^3$ מוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+x_2-3x_4\\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4\\ 2x_1+x_2+x_3+5x_4\end{pmatrix}$$

מצא בסיס ל- $\ker(T)$, $im(T)$

פתרון:

$\ker(T)$ = מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית

לפי סעיף (i) ⇐ B של סעיף (i) בסיס עבור $\ker(T)$.

$$im(T)=\left\{T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_4\end{pmatrix} : x_1,\dots,x_4\in\mathbb{Q}\right\}$$

$$T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_4\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$$

לכן: $\cancel{\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$ פורשים את $im(T)$.

$\cdot 2$

נמצא קבוצה מת"ל לה אותו מרחב נפרש ע"י

הפעלת פעולות ניסוי (פעולות שורה) על הוקטורים:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-3&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\-3&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+3R_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}$$ מדורג

⇐ $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ בסיס ל- $im(T)$

(דרך אחרת: כיוון שלא החלפנו שורות מקודם,, גם $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ בסיס ל- $im(T)$)

תרגיל 4:

יהי V מרחב וקטורי. $T\in Hom(V,V)$.

הוכח: אם $T^2=T$ אז $N_T \oplus R_T = V$

$$\begin{pmatrix} N_T = ker(T) \\ R_T = im(T) \end{pmatrix}$$

פתרון:

N_T תת מרחב של $dom(T)=V$

R_T תת מרחב של $im(T)=V$

$N_T\cap R_T=\{\vec{0}\}$? : יהי $v\in N_T\cap R_T$.

$v\in R_T$ ולכן קיים $u\in V$ כך ש- $v=T(u)$

$v\in N_T \Leftarrow$ $T^2(u) = T(T(u))=T(v)=\vec{0}$

$$\begin{matrix} T^2(u) \\ \parallel \leftarrow T=T^2 \\ T(u) \\ \parallel \\ v \end{matrix}$$

$\Leftarrow$ $v=\vec{0}$.

לכן הסכום N_T+R_T ישר. מהמימדים:

$$dim(N_T+R_T) = dim(N_T)+dim(R_T)-\underbrace{dim(N_T\cap R_T)}_{0\ \{\vec{0}\}} =$$

$$= dim(N_T)+dim(R_T) = dim\,V$$

משפט הדרגה של העתקה לינארית

$\Leftarrow$ N_T+R_T תתי מרחבים של V ומימדם שווה.

לכן $V=N_T+R_T$, וראינו שהסכום ישר.