1. א. (15 נקודות) תהי $\{y_1,...,y_n\}$ קבוצת וקטורים ב- R^n. הוכח כי לכל $\lambda_1,...,\lambda_n \in R^n$ מתקיים:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\right\| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^2\right).$$

1. ב. (10 נקודות) תהי $\{y_1,...,y_n\}$ קבוצת וקטורים ב- R^n, ויהי $\{u_1,...,u_n\}$ בסיס אורתונורמלי של R^n. הוכח כי אם קבוצת הוקטורים $\{y_1,...,y_n\}$ מקיימת $\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^2 < 1$ אז הקבוצה $\{u_1+y_1,...,u_n+y_n\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

2. תהי A מטריצה ב- $M_{n\times n}^C$. נגדיר את הטרנספורמציה φ ע"י: $\varphi(X)=AX$, לכל $X \in M_{n\times n}^C$.

א. (10 נקודות) בדוק ש- φ צמודה לעצמה אם ורק אם A צמודה לעצמה.

ב. (15 נקודות) נתון $n=2$ ו- $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) מצא את φ^*.

2) מצא את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימאלי של φ.

3) מצא את צורת ז'ורדן של הטרנספורמציה הלינארית φ.

3. תהי $q(x)=2x_2x_3+2x_3^2-2x_1^2$ תבנית ריבועית מעל R^3.

א. (13 נקודות) מצא בסיס של R^3 שבו q בעלת ההצגה:

$q=\delta_1 y_1^2+\delta_2 y_2^2+\delta_3 y_3^2$, כאשר $|\delta_i|=1$ לכל $i=1,2,3$.

ב. (12 נקודות) האם יש בסיס של R^3 שבו המטריצה המייצגת את q היא: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

4. א. (12 נקודות) נתונות שתי מטריצות צמודות לעצמן $A,B \in M_{n\times n}^C$. מניחים שכל הערכים העצמיים של A ושל B הם חיוביים. הוכח שכל הערכים העצמיים של $(A+B)$ הם חיוביים.

4. ב. (13 נקודות) הוכח ש- $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \|x\| \le 1$ לכל וקטור $x=(x_1,x_2)\in R^2$ שמקיים את השוויון: $34x_1^2-24x_1x_2+41x_2^2=25$. (רמז: הנורמה $\|x\|$ של הוקטור x מתייחסת למרחב R^2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. אפשר להשתמש בהערה שבעמוד 39, שיעור X, יחידות 6-5-4)

5. א. (12 נקודות) הוכח שלא קיימת מטריצה $S \in M_{n\times n}^C$ כך ש- $S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. ב. (13 נקודות) תהי $N \in M_{n\times n}^C$ מטריצה נורמלית. הוכח שאם המטריצה $A \in M_{n\times n}^C$ מקיימת $AN=0$, אז מתקיים $AN^*=0$.