שימו לב – כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.

במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

(13 נקודות) א. תהי $\{y_1,\ldots,y_n\}$ קבוצת וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$. הוכיחו כי לכל $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbf{R}$ מתקיים:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \right\|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^2 \right).$$

(12 נקודות) ב. לכל $P,Q \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$ נגדיר: $(P,Q) = \sum_{k=0}^{n-1} P(k)Q(k)$.

האם הנוסחה הזאת מגדירה מכפלה פנימית במרחב $\mathbf{R}_{n+1}[X]$?

הערה: $\mathbf{R}_{n+1}[X]$ הוא אוסף כל הפולינומים הממשיים, שמעלתם קטנה מ- $n+1$.

שאלה 2

תהי A מטריצה ב- $M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$. נגדיר את הטרנספורמציה T_A על ידי: $T_A(X) = AX$, לכל $X \in M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$.

(10 נקודות) א. בדקו ש- T_A צמודה לעצמה אם ורק אם A צמודה לעצמה.

(15 נקודות) ב. נתון $n=2$ ו- $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) מצאו את $(T_A)^*$.

(2) מצאו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימאלי של T_A.

(3) מצאו את צורת ז'ורדן של טרנספורמציה לינארית T_A.

שאלה 3

נגדיר תבנית ריבועית $q: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ על ידי $q(x_1,x_2,x_3) = 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_1^2$.

(10 נקודות) א. מצאו בסיס של $\mathbf{R}^3$ שבו q בעלת הצגה אלכסונית.

(10 נקודות) ב. האם יש בסיס של $\mathbf{R}^3$ שבו המטריצה המייצגת את q היא $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

(5 נקודות) ג. מצאו תת-מרחב U של $\mathbf{R}^3$ ממימד גדול ביותר, כך ש- q חיובית לחלוטין על U.

שאלה 4

(12 נקודות) א. נתונות שתי מטריצות צמודות לעצמן A, B ב- $M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$.
מניחים שכל הערכים העצמיים של A ושל B הם חיוביים.
הוכיחו שכל הערכים העצמיים של $A+B$ הם מספרים ממשיים חיוביים .

(13 נקודות) ב. הוכיחו ש- $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \|x\| \le 1$ לכל וקטור $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ שמקיים את השוויון :
$34x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2 = 25$.
(רמז : הנורמה $\|x\|$ של הווקטור x מתייחסת למרחב $\mathbf{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. אפשר להשתמש בהערה שבעמוד 39, שיעור X, יחידות 4-5-6).

שאלה 5

(12 נקודות) א. הוכיחו שלא קיימת מטריצה S ב- $M_{3\times 3}^{\mathbf{C}}$ כך ש- $S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(13 נקודות) ב. תהי $N \in M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ מטריצה נורמלית.
הוכיחו שאם המטריצה $A \in M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ מקיימת $A \cdot N = 0$, אז $A \cdot N^* = 0$.

בהצלחה !