

שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

(13 נקודות) א. נגדיר פונקציה $f(\mathbf{x}) = \frac{(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, לכל $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \mathbf{0}$ ב- \mathbf{R}^n .

1. מצא סקלר $M > 0$ מינימלי כך ש- $f(\mathbf{x}) \leq M$, לכל $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

2. מצא וקטור $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$ כך ש- $f(\mathbf{x}^*) = M$.

(12 נקודות) ב. יהיו A ו- B מטריצות מרוכבות מסדר 7×7 בעלות אותו פולינום מינימאלי

$(t - \lambda)^3$. נתון שלערך העצמי λ יש אותו ריבוב גיאומטרי r ב- A וב- B .

הוכח או הפרך: (1) אם $r = 3$ אז A ו- B דומות.

(2) אם $r = 4$ אז A ו- B דומות.

שאלה 2

(13 נקודות) א. תהי T טרנספורמציה לינארית במרחב אוניטרי V מממד סופי. הוכח כי אם $TT^* = 6T - 8I$ אז T חיובית לחלוטין ו- $2\|v\| \leq \|T(v)\| \leq 4\|v\|$, לכל $v \in V$.

(12 נקודות) ב. נתונות שתי תבניות ריבועיות ממשיות $q_1 = X^T A X$, $q_2 = X^T B X$. מניחים ש- A, B

מטריצות רגולאריות וסימטריות ב- $M_{2 \times 2}^{\mathbf{R}}$. הוכח כי לפחות אחת מהטענות הבאות נכונה:

1. A ו- B הן חופפות.

2. התבניות q_2, q_1 ניתנות ללכסון סימולטאני.

שאלה 3

יהיו $0 \leq a, b \leq 1$ שני מספרים ממשיים כך ש- $a + b = 1$.

(13 נקודות) א. הוכח שלכל שני וקטורים \mathbf{x}, \mathbf{y} ב- \mathbf{R}^n מתקיים $\|a\mathbf{x} + b\mathbf{y}\|^2 \leq a\|\mathbf{x}\|^2 + b\|\mathbf{y}\|^2$.

רמז: הוכח כי לכל שני סקלרים u, v ממשיים מתקיים $(au + bv)^2 \leq au^2 + bv^2$.

(12 נקודות) ב. נתונה $Q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ תבנית ריבועית חיובית לחלוטין.

1. הוכח שלכל שני וקטורים \mathbf{x}, \mathbf{y} ב- \mathbf{R}^n מתקיים $Q(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \leq aQ(\mathbf{x}) + bQ(\mathbf{y})$.

2. יהי $r > 0$. נסמן $B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : Q(\mathbf{x}) < r^2\}$. הוכח שאם $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_r$ אז $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in B_r$.

שאלה 4

יהי $M_{n \times n}^{\mathbf{F}}$ מרחב המטריצות מסדר $n \times n$, $n > 1$, מעל שדה \mathbf{F} , ותהי $A \in M_{n \times n}^{\mathbf{F}}$. נגדיר טרנספורמציה

לינארית $T : M_{n \times n}^{\mathbf{F}} \rightarrow M_{n \times n}^{\mathbf{F}}$ על ידי: $T(X) = AX$, לכל $X \in M_{n \times n}^{\mathbf{F}}$.

(11 נקודות) א. הוכח שלטרנספורמציה T ולמטריצה A יש אותו פולינום מינימאלי. האם יש להם אותו פולינום אופייני? נמק.

(8 נקודות) ב. מצא את צורת זיורדן של T במקרה ש- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ והשדה $\mathbf{F} = \mathbf{R}$.

(6 נקודות) ג. מצא את צורת זיורדן של T במקרה ש- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ והשדה \mathbf{F} מקיים $\text{char} \mathbf{F} = 2$.

שאלה 5

(13 נקודות) א. תהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה היטל אורתוגונלי על תת-מרחב U ,

ויהי W תת-מרחב של V . הוכח כי W הוא T -שמור אם ורק אם

$$W = (W \cap U) \oplus (W \cap U^\perp)$$

(12 נקודות) ב. תהי A מטריצה ממשית סימטרית. הוכח כי A^3 חופפת ל- A .

בהצלחה!