שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

(13 נקודות) א. תהי $T:V \to V$ טרנספורמציה לינארית במרחב מכפלה פנימית V.
נתון ש- $T^* = -T$. הוכח שלכל α ממשי, הטרנספורמציה $I - \alpha T$ היא הפיכה.
האם הטענה נכונה עבור כל $\alpha \in \mathbf{C}$?

(12 נקודות) ב. תהי $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ קבוצה של מטריצות בלתי תלויות לינארית במרחב $M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$.
הוכח שהמטריצה $U = \left(tr(A_i^t \cdot A_j)\right)_{1\le i,j\le k}$ היא הפיכה.

שאלה 2

(13 נקודות) א. יהי $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$. לכל $r > 0$ נסמן ב-

$$B_r(\mathbf{a}) = \left\{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n : (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 < r^2\right\}$$

יהיו $0 \le \alpha, \beta \le 1$ שני מספרים ממשים כך ש- $\alpha + \beta = 1$.
הוכח שאם $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{a})$ אז $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in B_r(\mathbf{a})$.

(12 נקודות) ב. נגדיר $q_1, q_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ על ידי

$$q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2, \quad q_2(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 .$$

קבע האם קיים בסיס שבו שתי התבניות הריבועיות, q_1 ו- q_2,
הן בעלות צורה אלכסונית.

שאלה 3

תהי $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(10 נקודות) א. מצא את צורת ז'ורדן G של A ומצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = G$.

(9 נקודות) ב. חשב את G^{100} ואת A^{100}.

(6 נקודות) ג. מצא נוסחה עבור a_n כאשר נתון: $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}, \quad a_1 = 2, \quad a_0 = 0$.
פתור את סעיף ג' בעזרת סעיף א'.

שאלה 4

(13 נקודות) א. הוכח שאם A מטריצה ממשית הפיכה אז $AA^t + A^tA$ מטריצה הפיכה.

(12 נקודות) ב. יהיו A ו- B מטריצות ממשיות סימטריות מסדר $n\times n$, שתיהן בעלות דטרמיננטה חיובית, וידוע כי לכל אחת מהן יש לפחות ערך עצמי חיובי אחד וערך עצמי שלילי אחד.

1. נתון ש- $n=4$. עבור איזה מספר שלם $k\geq 1$ המטריצות A^k ו- B^k חופפות?
2. נתון ש- $n=5$. עבור איזה מספר שלם $k\geq 1$ המטריצות A^k ו- B^k חופפות?
3. נתון ש- $n=4$. האם A ו- B בעלות אותה צורה ז'ורדן?

שאלה 5

(13 נקודות) א. תהי $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ טרנספורמציית ההיטל האורתוגונאלי על $Sp\{(1,0,1)\}$.

1. מצא את הפולינום המינימאלי של T ואת צורת ז'ורדן של T.
2. יהי $U\subset\mathbf{R}^3$ תת-מרחב מממד 2. נניח ש- $U\neq Sp\{(1,0,1)\}^\perp$.

הוכח ש- U תת-מרחב T-שמור של $\mathbf{R}^3$ אם ורק אם קיימים שני סקלרים a ו- b לא שניהם שווים לאפס כך ש- $U=Sp\{(1,0,1)\}\oplus Sp\{(a,b,-a)\}$.

(12 נקודות) ב. יהי $0<a<2$ מספר ממשי. נגדיר $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ על ידי $f(x,y)=x^2+2axy+2ay^2$. בדוק אם קיים מספר חיובי $m>0$, כך ש- $f(x,y)\geq m(x^2+y^2)$, לכל (x,y) ב- $\mathbf{R}^2$.

<u>בהצלחה!</u>