

שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
 במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.
 יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

תהי $T: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^5$ טרנספורמציה ליניארית מוגדרת על ידי :

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, x_3 + x_4, 0, x_3, x_1 + x_4)$$

א. הוכיחו ש- T טרנספורמציה ליניארית נילפוטנטית ומצאו את צורת זיורדן של T . (10 נקודות)

ב. האם קיים בסיס B של \mathbf{R}^5 כך ש- $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$? (10 נקודות)

ג. מצאו בסיס של \mathbf{R}^5 שביחס אליו T מיוצגת על ידי מטריצה זיורדן נילפוטנטית. (5 נקודות)

שאלה 2

יהי V מרחב מכפלה פנימית. יהיו $w_1, w_2 \in V$ וקטורים המקיימים: $(w_1, w_2) = 0, \|w_1\| = \|w_2\| = 1$.

נגדיר טרנספורמציה ליניארית $T: V \rightarrow V$ על ידי $T(v) = v - 2(v, w_1)w_1 - 2(v, w_2)w_2$.

א. הוכיחו כי T טרנספורמציה ליניארית צמודה לעצמה ואוניטרית. (13 נקודות)

ב. בדקו האם T טרנספורמציה אי שלילית. (12 נקודות)

שאלה 3

א. מצאו את כל הערכים הממשיים של λ שעבורם התבנית הריבועית:

$$q: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 10x_1 x_3 + 6x_2 x_3$$

חיובית לחלוטין.

ב. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל \mathbf{R} ו- $q: V \rightarrow \mathbf{R}$ תבנית ריבועית.

הוכיחו שאם הקבוצה $L = \{v \in V \mid q(v) \geq 0\}$ היא תת מרחב של V ,

אז q שומרת סימן.

שאלה 4

(12 נקודות) א. יהי $V = M_{2 \times 2}^{\mathbf{R}}$, ותהי $M \in V$. תהי $f: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ התבנית הביליניארית

$$f(A, B) = \text{tr}(A^t MB)$$

לכל $A, B \in V$. המוגדרת על-ידי:

הוכיחו כי f תבנית סימטרית אם ורק אם M מטריצה סימטרית.

(13 נקודות) ב. הוכיחו כי מטריצה $A \in M_{n \times n}^{\mathbf{C}}$ היא נילפוטנטית אם ורק אם כל הערכים

העצמיים שלה שווים לאפס.

שאלה 5

(12 נקודות) א. תהי T טרנספורמציה נורמלית במרחב אוניטרי V ממימד סופי.

יהי $v \in V, v \neq 0$. הוכיחו כי אם $\{Sp(v)\}^\perp$ הוא T -שמור,

אז v וקטור עצמי של T .

רמז: האם הוקטור $T^*(v)$ מאונך ל- $\{Sp(v)\}^\perp$?

(13 נקודות) ב. תהי $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ טרנספורמציה ההיטל על ציר ה- x במקביל לישר

$y = -\sqrt{3}x$. מצאו את המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה הצמודה

T^* לפי הבסיס הסטנדרטי $B = \{(1,0), (0,1)\}$.

בהצלחה !