שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

תהי $N \in M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$. נגדיר פונקציה $S: M_{n\times n}^{\mathbf{R}} \to M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ על ידי: $S(A) = NA + AN^t$.

(7 נקודות) א. הוכיחו ש- S טרנספורמציה ליניארית.

(7 נקודות) ב. הוכיחו שתת-המרחב W של המטריצות הסימטריות הוא מרחב S-שמור של $M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$.

(11 נקודות) ג. האם הצמצום של S ל- W הוא טרנספורמציה ליניארית צמודה לעצמה?

שאלה 2

(13 נקודות) א. יהיו P ו- Q מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$, ותהי $U = P + iQ$. נסמן $D = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}$. הוכיחו שאם U מטריצה אוניטרית, אז D מטריצה אורתוגונלית.

(12 נקודות) ב. מצאו את המרחק בין המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ לבין תת-המרחב $Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ המוכל ב- $M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$.

שאלה 3

(13 נקודות) א. נגדיר תבנית הריבועית $q: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ על ידי $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$. מצאו תת-מרחב U של $\mathbf{R}^3$ ממימד מקסימאלי כך ש- q היא תבנית חיובית לחלוטין על U.

(12 נקודות) ב. תהי $A \in M_{3\times 3}^{\mathbf{R}}$ כך שהפולינום האופייני שלה הוא $P_A(t) = t^3 + 3t^2 + t - 5$. מצאו את המקדמים של הפולינום האופייני של A^2 .

שאלה 4

(12 נקודות) א. יהיו A ו- B מטריצות חיוביות לחלוטין ו- Q מטריצה אוניטרית.
הוכיחו שאם $A = BQ$, אז $A = B$.

(13 נקודות) ב. יהיו A ו- B מטריצות ממשיות סימטריות מסדר 2×2 , כך שהפולינומים האופייניים שלהן הם $t^2 - 3$ ו- $t^2 + 3t - 4$, בהתאמה.
האם A ו- B חופפות?

שאלה 5

(12 נקודות) א. תהי U מטריצה אוניטרית מסדר $n \times n$, כך ש- $U + iI$ צמודה לעצמה.
הוכיחו ש- $U = -iI$.

(13 נקודות) ב. מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

בהצלחה !