שימו לב: כל המרחבים במבחן זה הם ממימד סופי.
במבחן זה מדובר במכפלות הפנימיות הסטנדרטיות למרחבים המתאימים.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1

תהי $P \in M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ מטריצה הפיכה. נגדיר טרנספורמציה לינארית $T_P : M_{n\times n}^{\mathbf{C}} \to M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ על-ידי:

$T_P\left(X\right) = PXP^{-1}$, לכל $X \in M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$.

(13 נקודות) א. הוכיחו ש- $(T_P)^* = T_{P^*}$.

(12 נקודות) ב. נניח ש- $n = 2$ ו- $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$. מצאו את המטריצה המייצגת את $(T_P)^*$ בבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$.

שאלה 2

(13 נקודות) א. נגדיר $f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ על ידי: $f(x, y) = 9x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1$, לכל $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$ ב- $\mathbf{R}^2$. הוכיחו ש- f תבנית בילינארית, מצאו בסיס שבו f מיוצגת על-ידי מטריצה אלכסונית והציגו את התבנית הריבועית המסומכת ל- f. פתרו את השאלה בעזרת שיטת לגרנז'.

(6 נקודות) ב. בדקו את נכונות נוסחת המעבר (משפט X.14) מן הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^2$ לבסיס שמצאתם בסעיף הקודם.

(6 נקודות) ג. פתרו את סעיף א' בעזרת חפיפות אלמנטאריות.

שאלה 3

(13 נקודות) א. תהי $T: V \to V$ ההעתקה המיוצגת בבסיס הסטנדרטי על-ידי המטריצה: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$. מצאו את כל תת-המרחבים ה- T-שמורים של V , כאשר $V = \mathbf{R}^2$ וכאשר $V = \mathbf{C}^2$.

(12 נקודות) ב. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbf{C}$, $\dim V \geq 2$. הוכיחו שאם $q: V \to \mathbf{C}$ תבנית ריבועית אז קיים $v \neq 0$ כך ש- $q(v) = 0$.

שאלה 4

(12 נקודות) א. תהי H מטריצה סימטרית ממשית מסדר $n\times n$ ויהי λ הערך העצמי המקסימלי של H. הוכיחו שלכל $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n$ כך ש- $\|\mathbf{x}\|=1$, מתקיים $\mathbf{x}^tH\mathbf{x}\le\lambda$.

(13 נקודות) ב. נתונה מטריצה $A\in M_{2\times2}^{\mathbf{R}}$. הוכיחו שקיימים $a,b,c\in\mathbf{R}$ שלא כולם אפס, כך ש- $aA^{1501}+bA^{2009}+cA^{1002}=0$. רמז : אל תחפשו משמעות עמוקה מאחורי החזקות.

שאלה 5

(12 נקודות) א. מצאו בסיס למשלים האורתוגונאלי של $W=Sp\{(i,0,-1)\}$ ב- $\mathbf{C}^3$.
מצאו את ההיטל האורתוגונאלי של הווקטור $u=(1,0,1)$ על $W^{\perp}$.

(13 נקודות) ב. תהי A מטריצה 3×3 כך שצורת ז'ורדן של A^2 היא : $\begin{pmatrix}9&1&0\\0&9&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
מצאו את הפולינום המינימאלי ואת הפולינום האופייני של A .
רשמו את צורת ז'ורדן של A בהנחה כי ל- A ערכים עצמיים שליליים בלבד.

בהצלחה !